МІНІСТЕРСТВО КУЛЬТУРИ І МИСТЕЦТВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ КУЛЬТУРИ

Г. Г. Асєєв, О. Є. Коноваленко, О. М. Рибін

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Харків, ХДАК, 2004

УДК 519.2(075.8)
ББК 22.171я73-1+22.172я73-1
А90

Друкується за рішенням вченої ради
Харківської державної академії культури
(протокол № 6 від 26.11.04.)

Рецензенти:

Г.Ф. Кривуля, зав. кафедрою АПВТ Харківського Національного університету радіоелектроніки, доктор технічних наук, професор;

Д.Е. Ситніков, зав. кафедрою інформаційно-документних систем, кандидат технічних наук, доцент

Асєєв Г. Г.

А90 **Теорія ймовірностей та математична статистика:** Навч. посіб. / Харк. держ. акад. культури; Г.Г. Асєєв, О.Є. Коноваленко, О. М. Рибін. — Х.: ХДАК, 2004. — 91 с.

УДК УДК 519.2(075.8)
ББК ББК 22.171я73-1+22.172я73-1

ПЕРЕДМОВА

Кожна математична теорія стає зрозумілішою та доступнішою, якщо її вдається застосувати для розв'язання практичних задач. Цей посібник дасть можливість кожному студенту оволодіти навичками використання теоретичних знань на практиці. Він може бути використаний студентами різних спеціальностей як денної, так і заочної форми навчання, навчальною програмою яких передбачено вивчення «Теорії ймовірностей та математичної статистики».

В посібнику коротко викладений необхідний теоретичний матеріал та наведено формули, що потрібні для розв'язання задач. Кожна задача має 31 варіант. Як еталонний розв'язаний нульовий варіант. Всі задачі різних варіантів однотипні. Числові дані наведені в таблицях або знаходяться за номером варіанта V та задані у вигляді вибірок. При вивченні курсу студент розв'язує свій варіант з набору задач.

Розділ I. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

§ 1. Випадкові події

1. Подія. Математична наука, що вивчає загальні закономірності випадкових явищ незалежно від їх конкретної природи та надає методи кількісної оцінки впливу випадкових факторів на різноманітні явища, називається ***теорією ймовірностей.***

Основою наукового дослідження в теорії ймовірностей є експеримент та спостереження. Експерименти можуть давати різні результати в залежності від того комплексу умов, в яких вони відбуваються. Результати експерименту можна характеризувати кількісно та якісно. Якісною характеристикою результату експерименту є подія. Кількісна характеристика результату експерименту, яка може приймати одне з можливих значень, заздалегідь невідомо яке саме, називається ***випадковою величиною.***

Отже, ***подією*** (або «випадковою подією») називається всілякий факт, який в результаті експерименту може статися, а може й не статися. Події прийнято позначати великими літерами латинської абетки. Сукупність всіх подій $\Omega = \{\omega\}$ називається множиною (або простором) події. Будемо вважати, що простір Ω кінцевий або лічений.

Якщо при всіх експериментах подія що розглядається настає завжди, вона називається ***достовірною***. Наприклад, при підриві осколкового снаряду достовірною подією є руйнування оболонки.

Якщо при всіх експериментах подія, що розглядається, не настає ніколи, вона називається ***неможливою***. Наприклад, при відсутності струму в електричній мережі неможливою подією є загоряння лампочки.

Повною групою подій називається кілька подій таких, що в результаті експерименту неодмінно станеться хоча б одна з них. Наприклад, коли експеримент складається з двох пострілів по мішені, події A_1 – жодного влучання, A_2 – одне влучання та A_3 – два влучання складають повну групу подій.

Декілька подій в даному експерименті називаються ***несумісними***, якщо ніякі два з них не можуть статися одночасно. Наприклад, коли кидають монету, події A_1 – поява герба та A_2 – поява цифри являються несумісними.

Декілька подій в даному експерименті називаються ***рівноможливими***, якщо за умов симетрії експерименту не має підстав вважати будь-яке з них більш можливим, ніж інші. Наприклад, якщо кидають гральну кость, подія F_1 – поява не менше за три очки та F_2 – поява не більше за чотири очки є рівноможливими.

Якщо декілька подій: 1) складають повну групу; 2) несумісні; 3) рівноможливі, вони називаються ***випадками*** (або «шансами»).

Випадок називається ***сприятливим події***, якщо поява цього випадку спричиняє появу події.

2. Відношення між подіями. При розробці апарату та методики дослідження випадкових подій в теорії ймовірностей дуже важливо встановити відношення між подіями. Ці відношення можна розглядати як відношення між відповідними підмножинами множини подій Ω.

1) ***Наступність***: $A \subset B$, якщо за здійсненням події A настає здійснення події B, або подія A спричиняє подію B;

2) ***Рівність***: $A=B$, якщо одночасно виконуються умови $A \subset B$ та $B \subset A$;

3) ***Сума***: $A \bigcup B$ виконується тоді, коли відбувається хоча б одна з цих подій;

4) ***Добуток***: $A \bigcap B$ виконується тоді, коли відбуваються обидві події (і A, і B);

5) ***Різниця***: $A \setminus B$ виконується тоді, коли подія A відбувається, а подія B не відбувається;

6) ***Протилежність***: Протилежна подія $\overline{A} = \Omega \setminus A$ відбувається тільки тоді, коли не відбувається подія *A*. Вірне й таке твердження: $\overline{\overline{A}} = A$.

3. Класична ймовірність. Чисельна міра можливості настання події називається його ***ймовірністю***. ***Класична ймовірність*** події *A* визначається як відношення числа випадків, що сприяють події *A(m)* до загального числа випадків *(n)*:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.1}$$

Ймовірність неможливої події F: P(F) = 0; ймовірність достовірної події $\Omega : \mathrm{P}(\Omega) = 1$***, а ймовірність довільної випадкової події A знаходиться між 0 та 1: 0 < P(A) < 1.***

Ймовірність суми подій $A \bigcup B$ *визначається за формулою:*

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B) \tag{1.2}$$

Якщо події несумісні, формула (1.2) спрощується та приймає вигляд:

$$P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) \tag{1.3}$$

Цю формулу можна узагальнити на випадок суми будь-якої кількості несумісних подій. Враховуючи, що $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, з формули (1.3) одержимо:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 \tag{1.4}$$

Якщо події *A* та *B* залежні має сенс говорити про умовну ймовірність *P*(*A* / *B*) події *A* за умови, що подія *B* вже сталася.

Коли події незалежні умовна ймовірність дорівнює звичайній ймовірності *P*(*A*/*B*) = *P*(*A*).

Ймовірність добутку подій $A \bigcap B$ виражається формулою:

$$P(A \bigcap B) = P(A / B) \cdot P(B) \text{ або}$$

$$P(A \bigcap B) = P(B / A) \cdot P(A) \tag{1.5}$$

Коли події незалежні формула (1.5) приймає вигляд:

$$P(A \bigcap B) = P(A) \cdot P(B) \tag{1.6}$$

Формулу (1.6) можна узагальнити на будь-яку кількість незалежних подій.

Якщо подія A залежить від подій (гіпотез) повної системи подій $B = \{B_1, B_2, \dots B_n\}$, ймовірність події A обчислюється за формулою повної ймовірності

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A / B_i) \cdot P(B_i) \tag{1.7}$$

У цьому випадку разом зі здійсненням події A відбувається одна і тільки одна подія з системи B.

Коли подія A сталася, можна обчислити умовну ймовірність того, що разом з подією A здійснюється гіпотеза B_i:

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A / B_i)}{P(A)}, \tag{1.8}$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події A. Одержану формулу називають формулою Бейєса. За допомогою формули (1.8) можна після експерименту уточнити ймовірність здійснення гіпотези B_i. Сума ймовірностей B_i повинна дорівнювати одиниці.

4. Поняття комбінаторики. При розв'язанні задач теорії ймовірностей часто використовують наступні поняття комбінаторики: перестановка, сполучення та розміщення, а також правило додавання та правило множення.

Нехай задана множина N, що складається з n об'єктів. Всілякі послідовності з усіх n об'єктів називаються ***перестановками***. Загальне число P_n різноманітних перестановок із n об'єктів обчислюється за формулою:

$$P_n = n! \tag{1.9}$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, при цьому вважають, що $0! = 1$.

Сполученнями називають підмножини множини N. Загальне число різних сполучень C_n^m з n об'єктів по m обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.10}$$

Розміщеннями називають упорядковані послідовності об'єктів підмножин множини *N*. Загальне число розміщень A_n^m з *n* об'єктів по *m* обчислюють за формулою:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)\ldots(n-m+1). \qquad (1.11)$$

Правило множення. Якщо треба виконати послідовно будь-які *k* дій, які можна виконати відповідно $n_1, n_2, ..., n_k$ засобами, то всі *k* дій разом можна виконати $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ засобами.

Правило додавання. Якщо дві взаємовиключні дії можуть виконуватися відповідно *m* або *n* засобами, то виконати одну з цих дій можна *m* + *n* засобами.

Запитання для самоперевірки

1. Які події називаються випадковими? Наведіть приклади.
2. Які події утворюють повну групу несумісних подій? Наведіть приклади.
3. Яка подія називається сумою, або об'єднанням, кількох подій?
4. Яка подія називається добутком, або суміщенням, кількох подій?
5. Сформулюйте класичне визначення ймовірності події. У яких межах змінюється ймовірність події?
6. Чому дорівнює сума ймовірностей несумісних подій, що утворюють повну групу?
7. Чому дорівнює сума ймовірностей несумісних подій?
8. Яка ймовірність називається умовною?
9. Чому дорівнює добуток ймовірностей?
10. За якою формулою обчислюється повна ймовірність? Для розв'язання яких задач застосовується формула ймовірності гіпотез?

Робота 1

Завдання:

1. Переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їх значеннями для варіанту, що розв'язується.
2. Визначити експеримент та події.
3. Встановити які формули слід застосувати для розв'язання задачі. Обчислення провести, по можливості, точно.

Задача 1.1. Кидають дві монети. Обчислити ймовірність того, що:

1) на обох монетах з'явиться «герб»;
2) хоча б на одній монеті з'явиться «герб»;
3) на жодній монеті не з'явиться «герб».

Кидають три монети. Обчислити ймовірність того, що:

4) на всіх монетах з'явиться «герб»;
5) хоча б на одній монеті з'явиться «герб»;
6) тільки на двох монетах з'явиться «герб»;
7) тільки на одній монеті з'явиться «герб»;
8) тільки на одній монеті не з'явиться «герб».

Кидають чотири монети. Обчислити ймовірність того, що:

9) на всіх монетах з'явиться «герб»;
10) хоча б на одній монеті з'явиться «герб»;
11) тільки на одній монеті з'явиться «герб»;
12) тільки на двох монетах з'явиться «герб»;
13) тільки на трьох монетах з'явиться «герб»;
14) на жодній монеті не з'явиться «герб».

Кидають гральну кість. Обчислити ймовірність того, що горішній грані з'явиться:

15) «1» або «6»;
16) парне число очок;

Кидають дві гральні кості. Обчислити ймовірність того, що на горішніх гранях з'являться наступні числа очок:

17) тільки парні;
18) одне парне, друге непарне;
19) сума яких парна;
20) сума яких непарна;
21) сума яких більша за їх добуток;
22) сума яких менше шести;
23) сума яких більше восьми.

Кидають три гральні кості. Обчислити ймовірність того, що на горішніх гранях з'являться наступні числа очок:

24) тільки парні;
25) одне парне, інші непарні;
26) сума яких парна;
27) сума яких непарна;
28) всі однакові;
29) всі різні;
30) сума яких ділиться на чотири;
31) сума яких ділиться на п'ять.

Задача 1.2. Слово складене з карток, на кожній з яких написана одна літера. Потім картки змішують та виймають без повертання по одній. Обчислити ймовірність того, що букви виймають у порядку заданого слова.

Слова за варіантами:

0)	МАТЕМАТИКА	11)	ПІДПРОГРАМА	22)	НАПІВПРОВІДНИК
1)	ПРОГРАМА	12)	ПРОЦЕДУРА	23)	ТРАНЗИСТОР
2)	СПЕЦІАЛІСТ	13)	ПРИСВОЮВАННЯ	24)	ІНТЕГРАЛ
3)	ПРОГРАМУВАННЯ	14)	УМОВА	25)	КАЛЬКУЛЯТОР
4)	ІНФОРМАТИКА	15)	ПРОЦЕСОР	26)	ОПЕРАЦІЯ
5)	СТАТИСТИКА	16)	МОНІТОР	27)	АРИФМЕТИКА
6)	ПОДІЯ	17)	ОБЛАДНАННЯ	28)	РОЗМІЩЕННЯ
7)	ВИПАДКОВІСТЬ	18)	ПЕРФОСТРІЧКА	29)	СПОЛУЧЕННЯ
8)	ЙМОВІРНІСТЬ	19)	ПЕРФОКАРТА	30)	СУКУПНІСТЬ
9)	АЛГОРИТМ	20)	КОРИСТУВАЧ		
10)	МЕНЕДЖЕР	21)	ДОКУМЕНТ		

Задача 1.3. Як і в попередній задачі, обчислити відповідну ймовірність випадку, коли заданим словом є ваше прізвище.

Задача 1.4. В лотереї розігрується 500 білетів. Серед них K виграшів по 50 гривень, H виграшів по 20 гривень, M виграшів по 10 гривень, P виграшів по 5 гривень. Хтось купує один білет. Обчислити ймовірність:

а) виграти не менше 10 гривень;
б) будь-якого виграшу.

Значення параметрів *K*, *H*, *M*, *P* за варіантами наведені в таблиці 1.

Таблиця 1

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	5	5	6	6	7	4	8	6	4	5	7	8	6	4	8	5
H	6	6	5	5	4	5	6	7	7	6	4	6	5	6	6	6
M	4	5	4	5	4	4	5	4	4	5	4	4	4	4	5	5
P	2	3	2	3	2	2	3	4	2	3	2	3	3	3	2	4

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	7	5	6	5	6	6	6	8	6	5	6	5	6	6	4
H	4	7	5	7	7	8	5	6	7	7	7	7	8	7	7
M	5	4	5	5	5	5	5	5	4	4	6	5	5	5	4
P	3	3	2	4	3	4	4	3	3	2	3	3	3	2	2

Задача 1.5. Пристрій складається з трьох незалежних елементів, що працюють безвідмовно *T* годин відповідно з ймовірностями P_1, P_2, P_3. Обчислити ймовірність того, що за час *T* вийде з ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент.

Значення параметрів обчислити за формулами:

$$k = |14{,}9 - V| : 100\ ^{*};$$

$$P_1=1-k;\ P_2=0{,}9-k;\ P_3=0{,}85-k.$$

Задача 1.6. В бібліотеці підручники з теорії ймовірності займають дві полиці. На першій – *K* підручників у твердій та *L* у м’якій обкладинці; на другій – *M* підручників у твердій та *N* у м’якій обкладинці. Бібліотекар бере з першої полиці *P* підручників, з другої полиці – *Q* підручників. Обчислити ймовірність того, що серед узятих бібліотекарем книжок:

а) всі книжки у твердій обкладинці;

б) тільки три у твердій обкладинці;

в) хоча б одна у твердій обкладинці.

---

* Тут і надалі літерою *V* позначений номер варіанту

Значення параметрів *K, L, M, N, P* та *Q* за варіантами наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	6	5	4	7	5	5	5	5	6	6	6	6	3	3	3	3
L	4	5	5	3	4	6	7	8	3	5	6	7	8	7	6	5
M	5	4	5	6	7	7	6	7	5	5	5	5	5	6	6	6
N	7	8	8	3	4	3	4	5	6	3	5	4	7	4	5	6
P	3	2	2	3	1	3	2	4	3	2	4	2	2	3	1	4
Q	2	2	3	1	4	2	2	1	3	2	1	3	3	3	4	1

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	3	5	4	4	4	4	4	4	4	7	7	7	7	7	7
L	4	3	9	8	7	6	5	4	3	2	4	5	6	7	8
M	6	4	7	7	8	7	7	7	7	4	8	4	4	4	8
N	7	9	3	4	3	5	6	7	8	8	5	6	7	4	5
P	2	2	3	2	4	2	3	3	1	4	3	2	3	1	3
Q	2	3	3	3	1	2	2	3	4	1	3	2	2	4	3

Задача 1.7. В урні міститься *K* чорних та білих кульок, до них додають *L* білих кульок. Після цього випадково виймають з урни *M* кульок. Обчислити ймовірність того, що всі вийняті кульки білі. Вважається, що всі можливі припущення про первісний склад урни рівноможливі.

Значення параметрів *K, L,*та *M* за варіантами наведені у таблиці 3.

Таблиця 3

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	4	3	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	4	3	3
L	2	4	3	2	4	4	4	3	3	3	4	4	4	4	4	4
M	3	4	4	3	4	2	3	2	3	4	2	3	4	5	2	3

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	3	3	3	3	3	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
L	4	5	5	5	5	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4
M	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3	4	5	2	3

Задача 1.8. В першій урні *K* білих та *L* чорних кульок, а в другій – *M* білих та *N* чорних кульок. З першої урни випадково виймають *P* кульок та кладуть у другу урну. Після цього з другої урни також випадково виймають *R* кульок. Обчислити ймовірність того, що всі кульки, вийняті з другої урни, білі.

Значення параметрів *K, L, M, N, P* та *R* за варіантами наведені у таблиці 4.

Таблиця 4

Варіант	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
K	5	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	6	6	6	6	6
L	6	5	4	3	2	3	4	5	6	7	8	8	7	6	5	4
M	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	3	3	3	3
N	8	7	6	5	4	3	5	4	6	7	8	9	3	4	5	6
P	3	2	3	2	3	3	4	2	3	2	3	3	4	3	4	4
R	4	3	3	4	4	2	3	4	3	4	3	4	3	2	3	2

Варіант	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
K	6	6	3	3	3	3	3	3	3	7	7	7	7	7	7
L	3	2	2	3	4	5	6	7	8	2	3	4	5	6	7
M	3	3	6	6	6	6	6	6	6	2	2	2	2	2	2
N	7	8	8	7	6	5	4	3	2	8	6	5	4	3	2
P	3	3	2	2	3	3	2	3	3	2	2	3	3	2	2
R	3	4	4	3	3	4	5	2	3	3	2	2	4	2	3

Задача 1.9. У піраміді стоять *R* гвинтівок, серед них *L* з оптичним прицілом. Стрілець, що стріляє з гвинтівки з оптичним прицілом може вразити мішень з ймовірністю P_1, а якщо він стрілятиме з гвинтівки без оптичного прицілу – з ймовірністю P_2. Обчислити ймовірність того, що стрілець вразить мішень, стрілятиме з випадково взятої гвинтівки.

Значення параметрів обчислюються за формулами:

$$k = \left|14 - V\right| : 100 \, ,$$

$$P_1 = 0{,}95 - k, \quad P_2 = 0{,}6 - k, \quad R = 5 + k \cdot 100, \quad L = \begin{cases} 3, & V \le 14 \\ 4, & V > 14 \end{cases}.$$

Задача 1.10. На складі фірми з продажу комп'ютерів є монітори трьох фірм-виробників у кількості M_1, M_2 та M_3 відповідно, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного строку з ймовірностями відповідно P_1, P_2 та P_3. Для комплектації виробу працівник фірми бере випадково один з моніторів. Обчислити ймовірність того, що підключений та безвідмовно працюючий до кінця гарантійного строку монітор поставлений відповідно першою, другою або третьою фірмою-виробником.

Значення параметрів обчислюються за формулами:

$$k = \left|14 - V\right| ,$$

$$P_1 = 0{,}99 - k/100,\ P_1 = 0{,}9 - k/100,\ P_1 = 0{,}85 - k/100,$$
$$M_1 = k + 5,\ M_2 = 20 - k,\ M_2 = 25 - k.$$

Розв'язання задач варіанта 1

Задача 1.1. Кидають три гральні кості. Обчислити ймовірність того, що на горішніх гранях з'явиться число очок, сума яких ділиться на п'ять.

Розв'язання. Визначимо експеримент та його результат, тобто елементарну подію. Експериментом є кидання трьох гральних костей; результатом – одне з сполучень очок 1, …, 6 на горішніх гранях трьох костей.

Подія A, що розглядається – сума очок на трьох костях ділиться на п'ять. Ймовірність події A обчислимо за допомогою формули (1.1):

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Загальну кількість елементарних подій n можна визначити за правилом множення. На кожній гральній кості 6 граней і всі вони можуть сполучатися зі всіма гранями інших костей. Отже, одержимо $n = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Кількість елементарних подій m, що входять до складу події A або сприяють події A можна знайти, якщо виписати всілякі результати експериментів та залишити лише ті з них, для яких сума очок на всіх трьох костях ділиться на п'ять.

Можна спростити роботу, записавши всілякі результати кидання перших двох костей та поєднати з ними відповідне значення кількості очок, що випали на третій кості.

Маємо:

113	145	221	253	325	361	433	465	541	613	645
122	154	226	262	334	366	442	514	546	622	654
131	163	235	311	343	415	451	523	555	631	663
136	212	244	316	352	424	456	532	564	636	

В результаті отримаємо: $P(m) = 43$, отже $P(A) = 43/216$.

Відповідь: $P(A) = \dfrac{43}{216}$.

Задача 1.2. Слово «МАТЕМАТИКА» складено з карток, на кожній з яких написана одна літера. Потім картки змішують та виймають без повернення по одній. Обчислити ймовірність того, що картки виймають у порядку заданого слова.

Розв'язання. Експеримент полягає у вийманні карток з літерами у випадковому порядку без повернення. Елементарною подією є отримана послідовність літер. Подія A – одержання потрібного слова «МАТЕМАТИКА». Елементарні події – це перестановки з 10 літер, отже за формулою (1.9) маємо $n = 10!$

Деякі літери в слові «МАТЕМАТИКА» повторюються (М – 2 рази, А – 3 рази, Т – 2 рази), тому можливі перестановки які не змінюють слова. Їх число дорівнює $m = 2!\cdot 3!\cdot 2! = 24$.

Таким чином, $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{24}{10!} = \dfrac{1}{151200}$.

Відповідь: $P(A) = \dfrac{1}{151200}$.

Задача 1.3. Прізвище студента записане за допомогою карток. Картки з літерами змішують та виймають по одній без повернення. Обчислити ймовірність того, що літери виймають у послідовності написання прізвища.

Ця задача розв'язується аналогічно попередній.

Задача 1.4. В лотереї розігрується 500 білетів. Серед них 5 виграшів у 50 гривень, 6 виграшів по 20 гривень, 4 виграші по 10 гривень та 2 виграші по 5 гривень. Хтось купує один білет. Обчислити ймовірність

а) виграшу не менше 10 гривень;

б) будь-якого виграшу.

Розв'язання. Експериментом є придбання лотерейного білета. Загальна кількість елементарних подій n дорівнює 500.

а) A_1 – виграш складає не менше 10 гривень.

Ця подія складається з трьох несумісних подій.

B_1 – виграш склав 10 гривень;

B_2 – виграш склав 20 гривень;

B_3 – виграш склав 50 гривень.

$$A_1 = B_1 \cup B_2 \cup B_3$$

Оскільки події B_1, B_2, B_3 несумісні, можна застосувати формулу (1.3).

Маємо:

$$P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3);$$

$$m_1 = 4;\ m_2 = 6;\ m_3 = 5;$$

$$P(B_1) = \frac{4}{500};\quad P(B_2) = \frac{6}{500};\quad P(B_3) = \frac{5}{500}.$$

$$P(A_1) = \frac{4}{500} + \frac{6}{500} + \frac{5}{500} = \frac{15}{500} = \frac{3}{100} = 0{,}03.$$

б) A_2 – придбали виграшний білет.

Ця подія складається з чотирьох несумісних подій: B_1, B_2, B_3 та B_4 – виграш склав 5 гривень, тобто

$$A_2 = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$$

Згідно з формулою (1.3) $P(A_1) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4)$. Оскільки $P(B_1)$, $P(B_2)$ та $P(B_3)$ ми вже обчислили в пункті а), необхідно визначити лише $P(B_4)$:

$$m_4 = 2 \Rightarrow \quad P(B_4) = \frac{m_4}{n} = \frac{2}{500}.$$

$$P(A_2) = \frac{4}{500} + \frac{6}{500} + \frac{5}{500} + \frac{2}{500} = \frac{17}{500} = 0{,}034.$$

Відповідь: $P(A_1) = 0{,}03$; $P(A_2) = 0{,}034$.

Задача 1.5. Пристрій складається з трьох незалежних елементів, що працюють безвідмовно T годин з ймовірностями 0,851, 0,751 та 0,701 відповідно. Обчислити ймовірність того, що за час T вийде з ладу:

а) тільки один елемент;

б) хоча б один елемент.

Розв'язання: Експеримент тобто роботу за час T, треба розглянути на двох рівнях: на рівні пристрою в цілому та на рівні елементів. Елементарні події визначати не треба, оскільки їх ймовірності надані.

а) A_1 – за час T виходить з ладу тільки один елемент;

B_1 – перший елемент виходить з ладу;

B_2 – другий елемент виходить з ладу;

B_3 – третій елемент виходить з ладу;

$\overline{B}_1$ – перший елемент працює бездоганно;

$\overline{B}_2$ – другий елемент працює бездоганно;

$\overline{B}_3$ – третій елемент працює бездоганно.

$$A_1 = \left(B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3\right) \cup \left(\overline{B}_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3\right) \cup \left(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3\right).$$

Враховуючи незалежність елементів пристрою, несумісність подій B_i і $\overline{B}_i$ та формули (1.3) і (1.6), одержимо таку формулу:

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3) + P(\overline{B}_1) \cdot P(B_2) \cdot P(\overline{B}_3) + \\ + P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(B_3).$$

З початкових умов,

$$P(\overline{B}_1)=0{,}851;\quad P(\overline{B}_2)=0{,}751;\quad P(\overline{B}_3)=0{,}701,$$

а за формулою (1.4) одержимо

$$P(B_1)=0{,}149;\quad P(B_2)=0{,}249;\quad P(B_3)=0{,}299.$$

Таким чином,

$$P(A_1)=0{,}149\cdot 0{,}751\cdot 0{,}701+0{,}851\cdot 0{,}249\cdot 0{,}701+$$
$$+0{,}851\cdot 0{,}751\cdot 0{,}299=0{,}418.$$

б) A_2 – за час T виходить з ладу хоча б один елемент.

Тут подія A_2 зазначена словами «хоча б один» і пряме рішення звичайно приводить до складних обчислень. Простіше спочатку знайти ймовірність протилежної події, а вже потім за формулою (1.4) обчислити ймовірність шуканої події. Отже, використаємо протилежну подію:

$\overline{A}_2$ – за час T всі елементи працюють безвідмовно.

$$\overline{A}_2=\overline{B}_1\cap\overline{B}_2\cap\overline{B}_3$$

$$P(\overline{A}_2)=P(\overline{B}_1)\cdot P(\overline{B}_2)\cdot P(\overline{B}_3)=0{,}851\cdot 0{,}751\cdot 0{,}701=0{,}448;$$

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-0{,}448=0{,}552.$$

Відповідь: $P(A_1)=0{,}418;\quad P(A_2)=0{,}552$.

Задача 1.6. У бібліотеці підручники з теорії ймовірності займають дві полиці. На першій – 6 книжок у твердій та 4 – у м’якій обкладинці, а на другій – 5 книжок у твердій та 7 у м’якій обкладинці. Бібліотекар бере з першої полиці 3 підручники, а з другої – 2. Обчислити ймовірність того, що серед узятих бібліотекарем підручників:

а) всі книги у твердій обкладинці;

б) тільки три книги у твердій обкладинці;

в) хоча б одна у твердій обкладинці.

Розв’язання: Книжки знімають з обох полиць незалежно. Експериментами є зняття книжок з першої та другої полиць. Елементарними подіями будуть сполучення по 3 або 2 з 10 або 12 книжок відповідно.

а) A_1 – всі зняті з полиць книжки у твердій обкладинці. Визначимо для кожної полиці всі можливі події:

B_1 – з першої полиці зняли 3 підручники у твердій обкладинці;

B_2 – з першої полиці зняли 2 підручники у твердій та 1 у м'якій обкладинці;

B_3 – з першої полиці зняли 1 підручник у твердій та 2 у м'якій обкладинці;

B_4 – з першої полиці зняли 3 підручники у м'якій обкладинці;

C_1 – з другої полиці зняли 2 підручники у твердій обкладинці;

C_2 – з другої полиці зняли 1 підручник у твердій та 1 у м'якій обкладинці;

C_3 – з другої полиці зняли 2 підручники у твердій обкладинці.

Отже, $A_1 = B_1 \cap C_1$, звідкіля, враховуючи незалежність та несумісність подій, одержимо

$$P(A_1) = P(B_1) \cdot P(C_1).$$

Обчислимо кількість елементарних подій n_1 та n_2 для першої та другої подій відповідно.

Маємо:

$$n_1 = C_{10}^3 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120, \quad n_2 = C_{12}^2 = \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 66 .$$

Кількість кожної з елементарних подій дорівнює:

B_1: $m_{11} = C_6^3 = \dfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$; C_1: $m_{21} = C_5^2 = \dfrac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10$;

B_2: $m_{12} = C_6^2 \cdot C_4^1 = \dfrac{5 \cdot 6 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 60$; C_2: $m_{22} = C_5^1 \cdot C_7^1 = 5 \cdot 7 = 35$;

B_3: $m_{13} = C_6^1 \cdot C_4^2 = \dfrac{6 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 1 \cdot 2} = 36$; C_3: $m_{23} = C_7^2 = \dfrac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21$;

B_4: $m_{14} = C_4^3 = 4$.

Отже, $P(A_1) = \dfrac{20}{120} \cdot \dfrac{10}{66} = \dfrac{5}{198}$.

б) A_2 – серед знятих з полиць підручників тільки три у твердій обкладинці. В цьому випадку

$$A_2 = (B_1 \cap C_3) \cup (B_2 \cap C_2) \cup (B_3 \cap C_1);$$

$$P(A_2) = P(B_1) \cdot P(C_3) + P(B_2) \cdot P(C_2) + P(B_3) \cdot P(C_1);$$

$$P(A_2)=\frac{20}{120}\cdot\frac{21}{66}+\frac{60}{120}\cdot\frac{35}{66}+\frac{36}{120}\cdot\frac{10}{66}=\frac{48}{132}=\frac{4}{11}.$$

в) A_3 – серед знятих книжок є хоча б одна у твердій обкладинці.

Оскільки подія A_3 зазначена словами «хоча б одна», треба перейти до протилежної події. $\overline{A}_3$ – серед знятих книжок немає жодної у твердій обкладинці.

Тоді $\overline{A}_3 = B_4 \cap C_3$;

$$P(\overline{A}_3)=P(B_4)\cdot P(C_3)=\frac{4}{120}\cdot\frac{21}{66}=\frac{7}{660};$$

$$P(A_3)=1-P(\overline{A}_3)=1-\frac{7}{660}=\frac{653}{660}.$$

Відповідь: $P(A_1)=\frac{5}{198}$; $P(A_2)=\frac{4}{11}$; $P(A_3)=\frac{653}{660}$.

Задача 1.7. В урні 4 чорних і білих кульки. До них добавляють 2 білих кульки. Після цього з урни випадково виймають 3 кульки. Обчислити ймовірність того, що всі вийняті кульки білі. Вважати, що всі можливі припущення про первісний склад урни рівноможливі.

Розв'язання. У задачі має місце два види експериментів: спочатку задається первісний склад урни, а потім випадково виймають 3 кульки, причому результат другого експерименту залежить від результату першого. Тому застосуємо формулу повної ймовірності (1.7).

Подія A – випадково виймають 3 білих. Ймовірність цієї події залежить від первісного складу кульок в урні.

Отже розглянемо події:

B_1 – в урні були 4 білих кульки;

B_2 – в урні були 3 білих та 1 чорна кулька;

B_3 – в урні були 2 білих та 2 чорних кульок;

B_4 – в урні були 1 біла та 3 чорних кульки;

B_5 – в урні були 4 чорних кульки;

Отже, формула повної ймовірності матиме такий вигляд:

$$P(A)=P(A/B_1)\cdot P(B_1)+P(A/B_2)\cdot P(B_2)+P(A/B_3)\cdot P(B_3)+$$
$$+P(A/B_4)\cdot P(B_4)+P(A/B_5)\cdot P(B_5).$$

Події B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, утворюють повну систему подій, тому

$$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5 = \Omega .$$

Застосовуючи формулу (1.3), одержимо

$$P(B_1) + P(B_2) + P(B_3) + P(B_4) + P(B_5) = 1 .$$

За умовою задачі всі ці ймовірності рівноможливі. Отже,

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5) = \frac{1}{5} .$$

Загальна кількість елементарних подій

$$n = C_6^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20 .$$

Визначимо умовні ймовірності події A за різних умов.
При B_1: в урні 6 білих кульок, отже

$$m_1 = C_6^3 = 20, \quad P(A/B_1) = \frac{20}{20} = 1 .$$

При B_2: в урні 5 білих та 1 чорна кулька, отже

$$m_2 = C_5^3 = \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 10, \quad P(A/B_2) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2} .$$

При B_3: в урні 4 білих та 2 чорних кульки, отже

$$m_3 = C_4^3 = 4, \quad P(A/B_3) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} .$$

При B_4: в урні 3 білих та 3 чорних кульки, отже

$$m_4 = C_3^3 = 1, \quad P(A/B_4) = \frac{1}{20} .$$

При B_5: в урні 2 білих та 4 чорних кульки, отже

$$m_5 = 0, \quad P(A/B_5) = 0 .$$

$$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{5} + 0 \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}\right) = \frac{1}{5} \cdot \frac{20 + 10 + 4 + 1}{20} = \frac{1}{5} \cdot \frac{35}{20} = \frac{7}{20} .$$

Відповідь: $P(A) = \frac{7}{20}$.

Задача 1.8. В першій урні 5 білих та 6 чорних кульок, в другій урні – 4 білих та 8 чорних кульок. З першої урни випадково виймають 3 кульки та кладуть в другу урну. Після цього з другої урни також випадково виймають 4 кульки. Обчислити ймовірність того, що всі кульки, вийняті з другої урни, білі.

Розв'язання. В цій задачі експеримент також відбувається в два етапи: спочатку випадково виймають кульки з першої урни та опускають їх у другу, а потім випадково виймають кульки з другої урни.

Розглянемо події:

A – кульки вийняті з другої урни;

B_1 – з першої урни виймають 3 білих кульки;

B_2 – з першої урни виймають 2 білих та 1 чорну кульку;

B_3 – з першої урни виймають 1 білу та 2 чорних кульки;

B_4 – з першої урни виймають 3 чорних кульки.

Застосуємо формулу (1.7):

$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) +$$
$$+ P(A/B_3)\cdot P(B_3) + P(A/B_4)\cdot P(B_4)$$

Кількість елементарних подій на першому етапі дорівнює

$$n_1 = C_{11}^3 = \frac{9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3} = 165,$$

а на другому етапі

$$n_2 = C_{15}^4 = \frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 13\cdot 7\cdot 15.$$

При B_1: $\quad m_1 = C_5^3 = \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} = 10, \quad P(B_1) = \frac{10}{165} = \frac{2}{33};$

$$m_2 = C_7^4 = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3} = 35 \Rightarrow P(A/B_1) = \frac{35}{13\cdot 7\cdot 15}.$$

При B_2: $\quad m_1 = C_5^2\cdot C_6^1 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 1} = 60, \quad P(B_2) = \frac{60}{165} = \frac{12}{33};$

$$m_2 = C_6^4 = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15 \Rightarrow P(A/B_2) = \frac{15}{13\cdot 7\cdot 15}.$$

При B_3: $\quad m_1 = C_5^1\cdot C_6^2 = \frac{5\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 1\cdot 2} = 75, \quad P(B_3) = \frac{75}{165} = \frac{15}{33};$

$$m_2 = C_5^4 = 5 \Rightarrow P(A/B_3) = \frac{5}{13\cdot 7\cdot 15}.$$

При B_4: $\quad m_1 = C_6^3 = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20, \quad P(B_4) = \frac{20}{165} = \frac{4}{33};$

$$m_2 = C_4^4 = 1 \Rightarrow P(A/B_4) = \frac{1}{13 \cdot 7 \cdot 15}.$$

$$P(A) = \frac{2}{33} \cdot \frac{35}{13 \cdot 7 \cdot 15} + \frac{12}{33} \cdot \frac{15}{13 \cdot 7 \cdot 15} + \frac{15}{33} \cdot \frac{15}{13 \cdot 7 \cdot 15} +$$

$$+ \frac{4}{33} \cdot \frac{1}{13 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{70 + 180 + 75 + 4}{33 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{329}{33 \cdot 13 \cdot 7 \cdot 15} = \frac{47}{6435}.$$

Відповідь: $P(A) = \dfrac{47}{6435}$.

Задача 1.9. У піраміді стоять 19 гвинтівок, з них 3 з оптичним прицілом. Стрілець, що стріляє з гвинтівки з оптичним прицілом може вразити мішень з ймовірністю 0,81, а якщо він стрілятиме з гвинтівки без оптичного прицілу, – з ймовірністю 0,46. Обчислити ймовірність того, що стрілець вразить мішень, коли стрілятиме з випадково взятої гвинтівки.

Розв'язання. В цій задачі першим експериментом є випадковий вибір гвинтівки, другим – стрільба по мішені. Розглянемо наступні події:

A – стрілець вразить мішень;

B_1 – стрілець візьме гвинтівку з оптичним прицілом;

B_2 – стрілець візьме гвинтівку без оптичного прицілу.

Застосуємо формулу повної ймовірності (1.7).

Маємо:

$$P(A) = P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2).$$

Якщо врахувати, що гвинтівки вибирають по одній, одержимо $n = C_{19}^1 = 19$ і відповідно $m_1 = C_3^1 = 3$ (для B_1) та $m_2 = C_{16}^1 = 16$ (для B_2); таким чином,

$$P(B_1) = \frac{3}{19}, \quad P(B_2) = \frac{16}{19}.$$

Умовні ймовірності надані в умові задачі:

$$P(A/B_1) = 0{,}81 \text{ та } P(A/B_2) = 0{,}46.$$

Отже, $P(A) = 0{,}81 \cdot \dfrac{3}{19} + 0{,}46 \cdot \dfrac{16}{19} = 0{,}515$.

Відповідь: $P(A) = 0{,}515$.

Задача 1.10. На складі фірми з продажу комп'ютерів є монітори трьох фірм-виробників у кількості 19, 6 та 11 шт. відповідно, які можуть безвідмовно працювати до кінця гарантійного строку з ймовірностями 0,85, 0,76 та 0,71 відповідно. Для комплектації виробу працівник фірми бере випадково один з моніторів. Обчислити ймовірність того, що підключений та безвідмовно працюючий до кінця гарантійного строку монітор поставлений відповідно першою, другою або третьою фірмою-виробником.

Розв'язання: Першим експериментом є вибір монітора, другим – робота монітора під час гарантійного строку. Розглянемо наступні події:

A – монітор працює безвідмовно до кінця гарантійного строку;

B_1 – працівник фірми візьме монітор з продукції 1-ї фірми-виробника;

B_2 – працівник фірми візьме монітор з продукції 2-ї фірми-виробника;

B_3 – працівник фірми візьме монітор з продукції 3-ї фірми-виробника;

Ймовірність події A обчислюємо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(A/B_1)\cdot P(B_1) + P(A/B_2)\cdot P(B_2) + P(A/B_3)\cdot P(B_3).$$

Умовні ймовірності надані в умові задачі:

$$P(A/B_1) = 0{,}85; \quad P(A/B_2) = 0{,}76; \quad P(A/B_3) = 0{,}71.$$

Аналогічно попередній задачі обчислимо ймовірності:

$$P(B_1) = \frac{19}{36} = 0{,}528,\ P(B_2) = \frac{6}{36} = 0{,}167,\ P(B_3) = \frac{11}{36} = 0{,}306;$$

$$P(A) = 0{,}85\cdot\frac{19}{36} + 0{,}76\cdot\frac{6}{36} + 0{,}71\cdot\frac{11}{36} = 0{,}792\ .$$

За формулою Байєса (1.8) обчислимо умовні ймовірності подій (гіпотез) B_i:

$$P(B_1/A) = \frac{0{,}528\cdot 0{,}85}{0{,}792} = 0{,}566\ ;$$

$$P(B_2/A) = \frac{0{,}167\cdot 0{,}76}{0{,}792} = 0{,}160\ ;$$

$$P(B_3/A) = \frac{0{,}306\cdot 0{,}71}{0{,}792} = 0{,}274\ .$$

Відповідь: $P(B_1/A) = 0{,}566$; $P(B_2/A) = 0{,}160$; $P(B_3/A) = 0{,}274$.

§ 2. Випадкові величини

1. Повторні дослідження. Припустимо, що подія A настає в результаті n незалежних експериментів, до того ж у кожнім експерименті ймовірність події A стала та дорівнює p. Результатом кожного експерименту може бути або подія A, або подія $\overline{A}$. Останнє відбувається з ймовірністю $g = 1 - p$.

Якщо розглядати всі n експериментів як один, його результатом буде добуток подій A та $\overline{A}$. Маючи на увазі незалежність вихідних експериментів важлива не послідовність подій а число повторень події A. Частоту події A позначимо k, $0 < k < n$. Тоді ймовірність появи події A k разів обчислюють за ***формулою Бернуллі***.

$$P_k = C_n^k \cdot p^k \cdot g^{n-k} \tag{1.12}$$

Якщо потрібно обчислити ймовірність для всіх значень k, $0 < k < n$, можна застосувати рекурентну формулу, за допомогою якої P_k обчислюється за значенням P_{k-1}:

$$P_k = \frac{n-k+1}{k} \cdot \frac{p}{g} \cdot P_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n . \tag{1.13}$$

Тоді P_0 слід обчислювати за формулою (1.12), яка при $k = 0$ має вигляд $P_0 = g^n$, а всі інші P_k – за формулою (1.13). При великих значеннях n та k обчислення за формулою Бернуллі достатньо громіздкі і, крім того, на практиці за звичай така висока точність непотрібна. Тому розроблені достатньо точні наближені методи обчислення ймовірності P_k.

Іноді необхідно знайти найімовірнішу частоту, тобто частоту, що має максимальну ймовірність. Найімовірніша частота знаходиться в інтервалі $np - g \le k \le np + g$. Довжина цього інтервалу дорівнює одиниці, тому, якщо межі інтервалу – цілі числа, маємо дві найімовірніші частоти, в протилежному випадку – тільки одну.

2. Формули Муавра-Лапласа та Пуассона. Замість формули Бернуллі (1.12) можна застосувати **локальну теорему Муавра-Лапласа:**

якщо при n незалежних експериментах подія A відбувається зі сталою ймовірністю P, яка не дуже близька до нуля або одиниці (0 < P < 1), то при достатньо великій кількості експериментів n ймовірність того, що подія A станеться k разів, приблизно дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{n \cdot p \cdot g}}, \tag{1.14}$$

де $$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{n \cdot p \cdot g}}.$$

Функція $f(x)$ – парна $\left(f(-x) = f(x)\right)$ і приймає тільки додатні значення (рис. 1). Для неї складені таблиці (див. додаток 1).

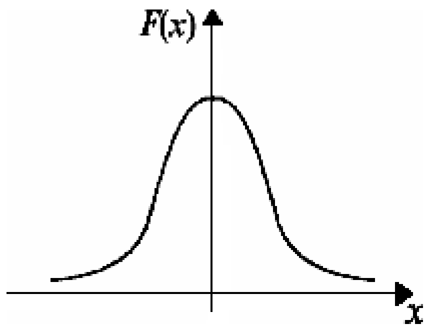

Рис. 1.

Оскільки графік функції симетричний відносно осі ординат, таблиці складені тільки для додатних значень аргументу.

Якщо ймовірність p реалізації події A близька до нуля, то треба застосувати **теорему Пуассона**, яка в цьому випадку дає більшу точність:

якщо при n незалежних експериментах подія A відбувається з ймовірністю p, близькою до 0, то при достатньо великому n ймовірність здійснення події A k разів приблизно дорівнює

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad (1.15)$$

де $\lambda = n \cdot p$.

Часто потрібно знайти ймовірність того, що частота з’явлення події *A* знаходиться у деякому інтервалі. Цю проблему дозволяє розв’язати **інтегральна теорема Муавра-Лапласа:**

якщо в n незалежних експериментах подія A відбувається зі сталою ймовірністю p, яка відмінна від 0 та 1, то при достатньо великому n ймовірність того, що частота події A знаходиться в інтервалі [a, b], приблизно дорівнює

$$P_n(a \le k \le b) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (1.16)$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt, \quad x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npg}}, \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npg}}$.

Функція $\Phi(x)$ є інтегралом від функції $f(x)$ (див. формулу (1.14)) і приймає значення в інтервалі $[0{,}1]$, при цьому $\Phi(-\infty) = 0$; $\Phi(\infty) = 1$ та $\Phi(0) = 0{,}5$. Для функції $\Phi(x)$ складені таблиці (див. додаток 2). Для від’ємних аргументів значення функції можна одержати з тієї ж таблиці:

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x). \qquad (1.17)$$

Розглянемо таку задачу. В *n* незалежних експериментах подія *A* відбувається зі сталою ймовірністю *p*. Знайти ймовірність того, що відносна частота k/n події *A* відрізняється від ймовірності події *A* за абсолютною величиною не більше ніж на $\varepsilon > 0$. Розв’язання цієї задачі зводиться до застосування інтегральної формули Муавра-Лапласа (1.16), за допомогою якої для цієї задачі одержимо формулу:

$$P_n\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pg}}\right) - 1. \qquad (1.18)$$

3. Поняття випадкової величини. ***Випадковою величиною X*** називають величину, яка приймає випадково деяке значення з сукупності своїх значень, її закон розподілення може бути заданий функцією розподілення

$$F(x) = P(X < x). \tag{1.19}$$

Функція розподілення $F(x)$ – не спадаюча, безперервна ліворуч функція, визначена на всій числовій осі, при цьому $F(-\infty) = 0$ та $F(\infty) = 1$. Випадкові величини звичайно позначають останніми літерами латинського алфавіту: *X, Y, Z*.

Практично випадкову величину можна одержати, якщо подіям з повної системи подій зіставити матеріальні числа. Сукупність цих чисел утворює сукупність значень випадкової величини. За сукупностями значень розрізняють випадкові величини двох видів: дискретні та безперервні.

Дискретною випадковою величиною називається така величина, число можливих значень якої або скінчене, або нескінчена лічильна множина (множина, елементи якої можуть бути занумеровані). Тобто дискретна – це така випадкова величина, значеннями якої є тільки окремі точки числової осі. Розглянемо кілька прикладів дискретної випадкової величини.

1. Частота влучання при трьох пострілах.

Можливі значення випадкової величини *x*, що виражають частоту влучання при трьох пострілах такі:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{2}{3}, \quad x_4 = 1.$$

2. Число дефектних виробів у партії з *n* штук.

Якщо позначити через *x* випадкове число дефектних виробів, можливі значення цього числа будуть такі:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots, \quad x_{n-1} = n.$$

3. Число викликів, що надходять на телефонну станцію протягом доби.

При цьому випадкова величина *x* може приймати такі значення:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots$$

4. Число пострілів до першого влучання у ціль.

У даному разі випадкова величина x може приймати нескінчену, але лічильну множину значень:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad \ldots$$

Закон розподілення дискретної випадкової величини x можна визначити за допомогою ряду розподілення, заданого у вигляді наступної таблиці:

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
P	P_1	P_2	P_3	$\ldots$	P_n

У першому рядку цієї таблиці вказані всі значення x_i дискретної випадкової величини x, а у другому – ймовірності P_i прийняття випадковою величиною відповідних значень x_i.

Сума всіх ймовірностей дорівнює одиниці. На базі ряду розподілення можна одержати ***функцію розподілення дискретної випадкової величини X***. Ця функція виражається формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P_i \tag{1.20}$$

Формулу (1.20) можна записати у вигляді, що наочно ілюструє безперервність ліворуч функції розподілення:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ P_1, & x_1 < x \le x_2, \\ P_1 + P_2, & x_2 < x \le x_3, \\ \ldots & \ldots \\ \sum\limits_{i=1}^{n-1} P_i, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n \end{cases} \tag{1.21}$$

Графік функції розподілення дискретної випадкової величини являє собою ступінчату лінію (рис. 2).

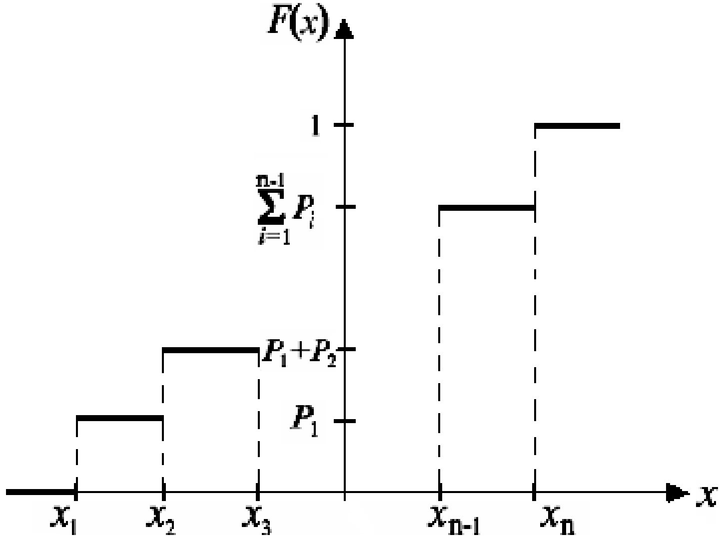

Рис. 2

Безперервною випадковою величиною називається така величина, можливі значення якої безперервно заповнює деякий інтервал (скінчений або нескінчений). Зрозуміло, кількість можливих значень безперервної випадкової величини нескінчена.

Приклади безперервної випадкової величини.

1. Випадкове відхилення за дальністю точки падіння снаряда від цілі.

Оскільки снаряд може впасти у будь-яку точку інтервалу, обмеженого границями розсіювання снарядів, всі числа з цього інтервалу будуть можливими значеннями випадкової величини X – відхилення точки падіння снаряда від цілі.

2. Помилка при вимірюванні дальності радіолокатором.

3. Час безвідмовної роботи радіодеталей.

4. Діаметр оброблений втулки та т. і.

Закон розподілення безперервної випадкової величини задається або ***функцією розподілення***, або ***функцією густини ймовірності***. Функція розподілення безперервної випадкової величини x задається інтегралом

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x) \cdot dx \, , \qquad (1.22)$$

де $f(x) > 0$ – функція густини ймовірності.

Графік цієї функції завжди охоплює фігуру, площа якої дорівнює одиниці. Це витікає з властивості функції розподілення: $F(\infty) = 1$, отже

$$F(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot dx = 1 \, . \qquad (1.23)$$

Формула (1.22) визначає площу під графіком функції $f(x)$ в інтервалі $[-\infty, 0]$ (рис. 3).

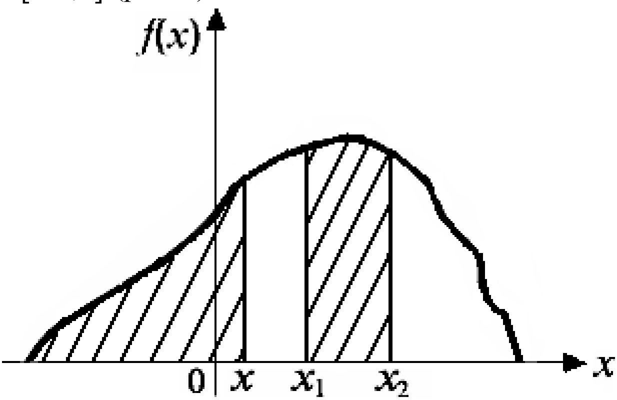

Рис. 3.

Якщо задані два значення x_1 та x_2 безперервної випадкової величини $X(x_1 < x_2)$, ймовірність того, що X приймає значення в інтервалі $[x_1, x_2]$, дорівнює

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \cdot dx \qquad (1.24)$$

Це можна довести за допомогою формул (1.19) та (1.22).

Нерівність $f(x_1) > f(x_2)$ означає, що при достатньо великій кількості експериментів поблизу точки x_1 опиниться більше значень випадкової величини X, ніж навколо точки x_2. Отже, чим більше значення функції густини ймовірності, тим більша ймовірність того, що випадкова величина прийме значення поблизу цієї точки (але не обов'язково в самій точці).

З формули (1.22) витікає, що

$$f(x) = F'(x). \tag{1.25}$$

Випадкові величини X* та *Y незалежні, якщо для всіх пар чисел (x, y) незалежні і відповідні події $(X < x)$ та $(Y < y)$.

4. Числові характеристики випадкової величини. Ми вже знаємо, що закон розподілення повністю характеризує випадкову величину. Знаючи закон розподілення, можна вказати, де розташовуються можливі значення випадкової величини і яка ймовірність її появи в тому чи іншому інтервалі.

Але при розв'язанні багатьох практичних задач нема потреби характеризувати випадкову величину повністю, достатньо мати лише загальне уявлення, вказати деякі характерні риси закону розподілення. В теорії ймовірностей для загальної характеристики випадкової величини використовують величини, що носять назву числової характеристики випадкової величини. Їх основне призначення – у стислій формі виявити найбільш суттєві особливості того чи іншого розподілення.

1) Математичне очікування. Математичне очікування є важливішою характеристикою положення випадкової величини – $M(X)$. Математичне очікування іноді називають просто середнім значенням випадкової величини.

Математичним очікуванням дискретної випадкової величини х називається сума добутків всіх можливих значень випадкової величини на ймовірності цих значень.

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i \tag{1.26}$$

де x_i – значення дискретної випадкової величини, p_i – ймовірність того, що випадкова величина прийме значення x_i, n – кількість значень випадкової величини, яке може дорівнювати і ∞, але ряд (1.26) повинен абсолютно збігатися.

Математичним очікуванням безперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку **[*a*, *b*]**, називають визначений інтеграл

$$M(X)=\int_a^b x\cdot f(x)\cdot dx\,, \tag{1.27}$$

де $f(x)$ – функція густини ймовірності випадкової величини.

Якщо можливі значення безперервної випадкової величини X належать всій осі *x*,

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)\cdot dx\,, \tag{1.28}$$

і цей інтеграл збігається абсолютно.

Математичне очікування безперервної випадкової величини має такі властивості, спільні для дискретних та безперервних випадкових величин:

1) $M(C)=C$, якщо C – стала, тобто середнє значення сталої величини дорівнює сталій;

2) $M(C\cdot X)=C\cdot M(X)$, тобто сталу можна виносити з-під знаку математичного очікування;

3) $M(X+Y)=M(X)+M(Y)$, тобто середнє значення суми випадкових величин дорівнює сумі середніх значень випадкових величин;

4) якщо випадкова $M(X)\geq 0$ величина $x\geq 0$, то і математичне очікування;

5) якщо випадкові величини X та Y незалежні, то $M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, тобто математичне очікування добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку математичних очікувань випадкових величин.

2) Дисперсія. Для характеристики випадкової величини недостатньо знати лише числові характеристики положення, оскільки тому ж самому математичному очікуванню може відповідати багато випадкових величин, різних не тільки за своїми значеннями, але й за їх характером та природою. Значення випадкових величин, що розглядаються на практиці, завжди більше або менше коливаються навколо середнього значення. Це явище називається розсіюванням величини навколо її середнього значення. Розсіювання випадкової величини характеризують ***дисперсія*** та ***середнє квадратичне відхилення***.

Дисперсією випадкової величини називається математичне очікування квадрату відхилення величини від її математичного очікування

$$D(X) = M(X - M(X))^2 \tag{1.29}$$

Якщо звернути увагу на властивості середнього значення, можна привести цю формулу до вигляду

$$D(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2 \tag{1.30}$$

Дисперсія дискретної випадкової величини обчислюється (спираючись на формули (1.27), (1.29) та (1.30)) за такою формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \cdot p_i \tag{1.31}$$

або

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - (M(X))^2 \tag{1.32}$$

Аналогічно, згідно з формулами (1.28) – (1.30), одержимо формули для обчислення дисперсії безперервної випадкової величини:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(x)dx\,, \tag{1.33}$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (M(X))^2 \tag{1.34}$$

Дисперсія має властивості, які можна довести на підставі властивостей середнього значення:

1. $D(C) = 0$: дисперсія сталої величини дорівнює нулю;
2. $D(X) \ge 0$: дисперсія завжди ненегативна;
3. $D(C \cdot X) = C^2 \cdot D(X)$: сталу можна винести з-під знаку дисперсії, якщо попередньо підвести її в квадрат;

4. $D(C+X)=D(X)$: зміна випадкової величини на сталу не змінює її дисперсії;

5. $D(X \pm Y)=D(X)+D(Y)$: дисперсія суми або різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих випадкових величин.

3) Середнє квадратичне відхилення. Дисперсія випадкової величини є дуже зручною характеристикою розсіювання. Але їй бракує наочності, оскільки вона має розмірність квадрату випадкової величини. Характеристикою, розмірність якої співпадає з розмірністю випадкової величини, є середнє квадратичне відхилення.

Середнім квадратичним відхиленням називається квадратний корінь з дисперсії.

$$G_x = \sqrt{D(X)} \tag{1.35}$$

4). Моменти випадкової величини. Узагальненням основних числових характеристик випадкових величин є поняття моментів випадкової величини. Сама назва «момент» запозичена з механіки, де це поняття застосовується для опису розподілення мас.

В теорії ймовірностей розрізняють моменти двох видів: початкові та центральні.

Початковим моментом *k*-го порядку випадкової величини X називають математичне очікування величини X^k, тобто

$$\nu_k = M\left[X^2\right] \tag{1.36}$$

Для дискретної випадкової величини початковий момент – це сума

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i \, ,$$

а для безперервної – інтеграл

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx \, ,$$

З початкових моментів особливе значення має момент першого порядку, який являє собою математичне очікування випадкової величини. Початкові моменти вищих порядків головним чином застосовуються при обчисленні центральних моментів.

Центральним моментом k-го порядку випадкової величини X називають математичне очікування величини $(X - M(X))^k$

$$\mu_k = M\left[(X - M(X))^k\right] \tag{1.37}$$

Для дискретної випадкової величини центральний момент – це сума

$$\mu_k = \sum (x_i - M(X))^k \cdot p_i$$

а для безперервної – інтеграл виду

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k \cdot f(x)dx$$

Центральний момент першого порядку завжди дорівнює нулю, центральний момент другого порядку – це дисперсія випадкової величини.

Центральний момент третього порядку характеризує асиметрію («скривленість») розподілення, а момент четвертого порядку – гостровершинність або плосковершинність розподілення.

5. Рівномірне розподілення. Випадкова величина *X*, що має рівномірне розподілення, приймає значення в інтервалі [*a, b*], її функція густини ймовірності $f(x)$ у цьому інтервалі стала.

З умови (1.23) можна визначити цю сталу та записати функцію густини ймовірності рівномірного розподілення:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases} \tag{1.38}$$

Функцію розподілення можна знайти за формулою (1.22):

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{x-b}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \tag{1.39}$$

Графіки функції густини ймовірності $\mathrm{f(x)}$ та функції розподілення $F(x)$ рівномірного розподілення показані на рис. 4, 5.

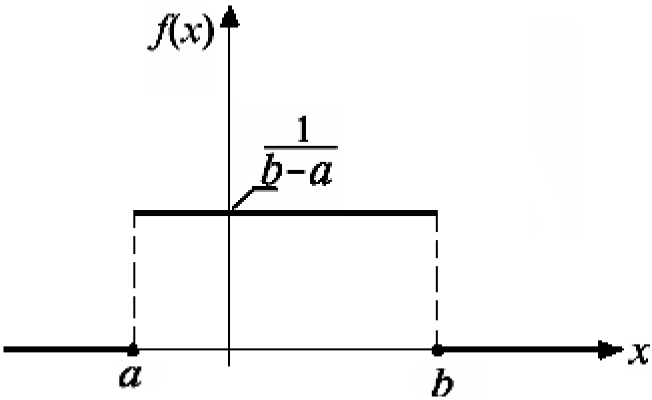

Рис. 4.

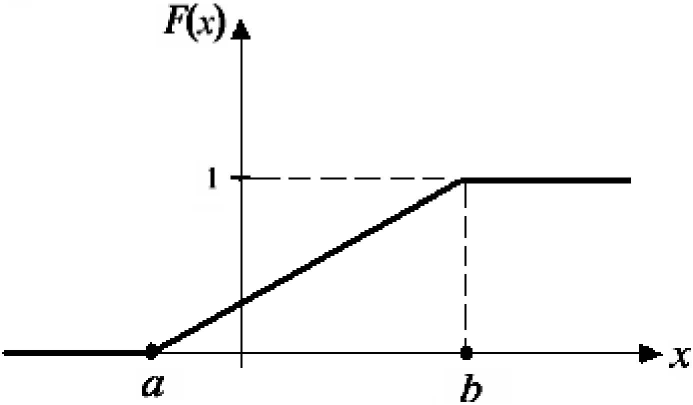

Рис. 5.

Випадкову величину, що має рівномірне розподілення, ми зустрічаємо у вимірювальній практиці коли округляємо відліки вимірювальних приладів до цілих поділок шкал. Помилка округлення відліків до найближчої цілої поділки є випадковою величиною, яка може приймати зі сталою густиною ймовірності будь-яке значення між двох сусідніх поділок.

Математичне очікування $M(X)$ одержимо за формулою (1.28): $M(X) = \dfrac{a+b}{2}$, а дисперсію $D(X)$ – за формулою (1.34), $D(X) = \dfrac{b-a}{12}$.

6. Біноміальне розподілення. Випадкову величину, що має біноміальне розподілення, можна отримати при повторних незалежних дослідженнях. Значеннями випадкової величини x є частоти події A при незалежних дослідженнях, тобто цілі числа з інтервалу $[0, n]$. Це означає, що випадкова величина з біноміальним розподілом дискретна.

Ймовірність кожного значення обчислюється за формулою Бернуллі (1.12). Згідно з формулою (1.20), можна записати функцію розподілення біноміальної випадкової величини:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k \cdot p^k \cdot g^{n-k}, & 0 < x \le n, \\ 1, & x > n. \end{cases} \tag{1.40}$$

Параметрами біноміального розподілення є n та p. Математичне очікування біноміального розподілення $M(X) = n \cdot p$ та дисперсія $D(X) = n \cdot p \cdot g$.

7. Розподілення Пуассона. Випадкова величина, що має розподілення Пуассона, приймає значення 0, 1, 2, …, n. крім того, ймовірність p_k того, що вона приймає значення $k \ge 0$, обчислюється за формулою Пуассона (1.15). Її функція розподілення визначається відношенням

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} \dfrac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}, & 0 < x \le n, \\ 1, & x > n \end{cases} \tag{1.41}$$

де $\lambda = \text{const}, \quad \lambda > 0$.

Параметром розподілення є величина λ . Цьому параметру дорівнюють і математичне очікування, і дисперсія.

8. Нормальне розподілення. Серед розподілень безперервних випадкових величин центральне місце займає нормальний закон (закон Гаусса). Цей закон дуже поширений на практиці. Він виявляється у всіх випадках, коли випадкова величина X є результатом взаємодії великої кількості факторів, кожний з яких незначно впливає на величину X і не можна вказати достеменно який з них впливає більше за інші. Прикладами випадкових величин, що мають нормальне розподілення, будуть: відхилення дійсних розмірів деталей, що обробляються на верстаті, від номінальних розмірів, відхилення при стрільбі та ін.

Головна особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються всі інші закони розподілення.

Нормально розподілена випадкова величина може приймати будь-які значення в інтервалі $\left[-\infty;+\infty\right]$ та має функцію густини ймовірності

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1.42)$$

де μ та σ – параметри розподілення, до того ж $\sigma > 0$.

Як показують дослідження функції $f(x)$, вона визначена на всій числовій осі, всі її значення ненегативні, при $|x| \to \infty$ значення функції зменшуються $f(x) \to 0$, тобто ось x є асимптотою функції $f(x)$. Максимуму функція $f(x)$ досягає в точці $x = \mu$ і дорівнює він $\dfrac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}}$. Точки перегину функції $x_1 = \mu - \sigma$ та $x_2 = \mu + \sigma$.

При зміні значення μ графік функції $f(x)$ «жорстко» переміщується вздовж осі x (рис. 6).

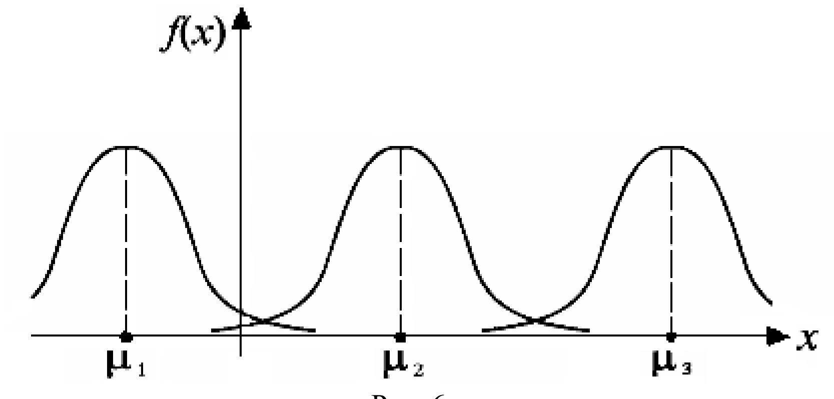

Рис. 6.

При зміні значення σ змінюється загальний вигляд графіка: при збільшенні значення σ у m раз максимальне значення функції зменшується в m раз і графік «витягається» в обидва боки вздовж осі x. При зменшенні значення σ все відбувається в зворотному напрямку (рис. 7).

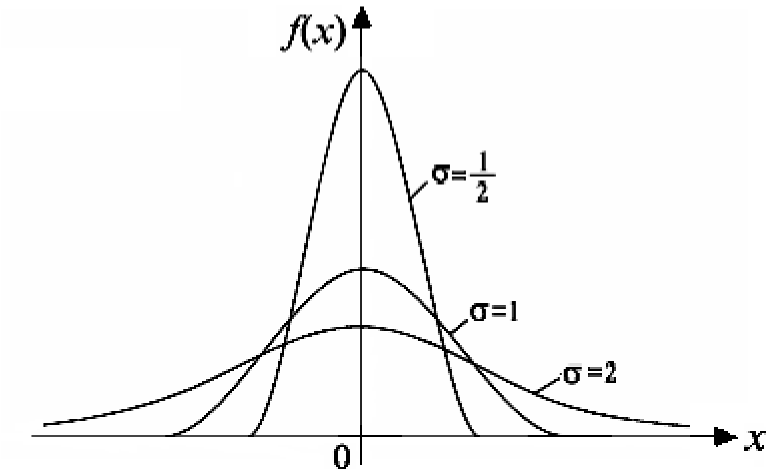

Рис. 7.

Спираючись на формули (1.22) та (1.42) одержимо функцію розподілення

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx\,. \qquad (1.43)$$

За параметрами нормального розподілення обчислюються і всі числові характеристики: $M(X)=\mu$, $D(X)=\sigma^2$, σ є середнім квадратичним відхиленням.

Особливе значення серед нормальних розподілень має ***нормоване нормальне розподілення*** з параметрами 0 та 1. Якщо підставити $\mu=0$ та $\sigma=1$ до формул (1.42) та (1.43), одержимо вже знайомі формули для $f(x)$ та $\Phi(x)$ (1.14) та (1.16). Для цих функцій, як ми вже знаємо, складені таблиці. Від довільного нормального розподілення можна перейти до нормованого розподілення, перетворивши змінні величини.

$$Z = \frac{x-\mu}{\sigma}. \qquad (1.44)$$

Нормально розподілені випадкові величини застосовують при розв’язанні двох типів задач.

Перша задача: знайти ймовірність того, що нормально розподілена випадкова величина X приймає значення в інтервалі $[a, b]$. Цю ймовірність обчислюють за формулою

$$P(a \le X \le b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \qquad (1.45)$$

де $\Phi(x)$ – функція розподілення нормованого нормального розподілення.

Друга задача: обчислити ймовірність того, що випадкова величина з нормальним розподіленням відрізняється від свого середнього значення μ за абсолютною величиною не більше ніж на ε:

$$P(|X-\mu| \le \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1. \qquad (1.46)$$

Ця формула випливає з (1.45).

Якщо $\varepsilon = \sigma$, то за формулою (1.46) одержимо P= 0,68268; якщо $\varepsilon = 2\sigma$, то P = 0,95450; якщо $\varepsilon = 3\sigma$, то $P = 0{,}99730 \approx 1$. Таким чином, нормально розподілена випадкова величина практично не приймає значень, які відрізнялися б від середнього значення за абсолютною величиною більше ніж на 3σ. Це твердження називають ***правилом «трьох сигм»***.

Запитання для самоперевірки

1. Яку величину називають випадковою величиною?
2. Дати визначення дискретної та безперервної випадкових величин. Навести приклади.
3. Що називається законом розподілення випадкової величини?
4. Дати визначення функції розподілення. Перелічити властивості цієї функції.
5. Дати визначення густини розподілення ймовірності.
6. Що називається математичним очікуванням дискретної та безперервної величини?
7. Дати визначення дисперсії випадкової величини та перелічити її властивості.
8. Що називається початковим моментом k-го порядку, центральним моментом k-го порядку?

9. Яке розподілення ймовірностей називають біноміальним? Чому дорівнюють математичне очікування та дисперсія цього розподілення?

10. Яке розподілення випадкової величини називають нормальним? Як за параметрами розподілення визначити математичне очікування, дисперсію та середнє квадратичне відхилення?

Робота 2

Завдання:

1. Переписати текст задачі, замінюючи всі параметри їх значеннями для варіанта, що розв'язується.
2. Визначити початкові дані та необхідні розрахункові формули.
3. Виконати розрахунки.
4. Якщо потрібно, побудувати графіки.

Задача 2.1. В кожному з n незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю p. Обчислити всі ймовірності p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, де k – частота події A. Побудувати графік ймовірностей p_k. Визначити найімовірнішу частоту.

Значення параметрів n та p визначати за формулами:

$$n = \begin{cases} 11, & v \le 10, \\ 10, & 10 < v \le 20, \\ 9, & v > 20. \end{cases} \qquad p = 0{,}3 + \frac{v}{100},$$

Задача 2.2. В кожному з n незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю p. Обчислити ймовірність того, що подія A відбувається:

а) менше ніж L разів;

б) точно G разів;

в) більше ніж F, але менше ніж M разів;

г) більше ніж R разів.

Значення параметрів n, p, G, L, M, F та R обчислюються за такими формулами:

$$n = 500 + v \cdot 10\,; \qquad p = 0{,}4 + \frac{v}{100}\,;$$

$G = 220 + v \cdot 10$; $\quad L = G - 30$;

$M = G + 20 + v$; $\quad F = G - 40 + v$; $R = G + 15$.

Задача 2.3. На телефонній станції помилкове з’єднання відбувається з ймовірністю *p*. Знайти ймовірність того, що серед *n* з’єднань має місце:

а) точно *G* помилкових з’єднань;

б) менше ніж *L* помилкових з’єднань;

в) більше ніж *M* помилкових з’єднань.

Значення параметрів p, n, G, L та *M* обчислюються за формулами:

$$D = v \cdot 100 + 200; \quad P = \frac{1}{D}; \quad S = \text{залишок}\left(\frac{v}{7}\right) + 1;$$

$$n = S \cdot D; \quad G = \text{залишок}\left(\frac{v}{5}\right) + 1;$$

$$L = \text{залишок}\left(\frac{v}{6}\right) + 3; \quad M = \text{залишок}\left(\frac{v}{8}\right) + 2.$$

Задача 2.4. В кожному з *n* незалежних експериментів подія *A* відбувається зі сталою ймовірністю *p*. Обчислити ймовірність того, що відносна частота k/n цієї події відрізняється від ймовірності *p* за абсолютною величиною не більше ніж на ε .

Значення параметрів $n,\ p\ ?\ \varepsilon$ обчислюються за формулами:

$$n = 600 - v \cdot 10; \quad p = 0{,}85 - \frac{v}{100}; \quad \varepsilon = 2\left(0{,}0055 - \frac{v}{10000}\right).$$

Задача 2.5. Випадкова величина *X* задана рядом розподілення

X	x_1	x_2	x_3	x_4
P	p_1	p_2	p_3	p_4

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини *X* та побудувати її графік. Обчислити для *X* її математичне очікування $M(x)$ та дисперсію $D(x)$.

Значення параметрів $x_1, x_2, x_3, x_4, p_1, p_2, p_3, p_4$ обчислюються за формулами:

$$R = \text{залишок}\left(\frac{v}{4}\right) + 2\,;$$

$$x_1 = v + 3; \quad x_2 = x_1 + R; \quad x_3 = x_2 + R; \quad x_4 = x_3 + 2R\,;$$

$$p_1 = \frac{1}{R+5}; \quad p_2 = \frac{1}{R+3}; \quad p_3 = \frac{41 + 33R + R^2 - R^3}{(R+3)(R+5)(8-R)}; \quad p_4 = \frac{1}{8-R}\,.$$

Задача 2.6. Випадкова величина X задана функцією густини ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le k, \\ 0, & x > k \end{cases}$$

де a – невідома стала, яку треба попередньо обчислити.

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини x. Побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$. Обчислити для X математичне очікування $M(x)$ та дисперсію $D(x)$.

Значення параметра k обчислити за формулою: $k = 2 + v$.

Задача 2.7. Задана нормально розподілена випадкова величина X. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина приймає значення:

а) в інтервалі $[a, b]$;

б) менше K;

в) більше L;

г) що відрізняється від свого середнього значення не більше ніж на ε.

Значення параметрів μ, σ, a, b, K, L та ε обчислюють за формулами:

$$\mu = v, \quad \sigma = \text{залишок}\left(\frac{v}{8}\right) + 2, \quad S = \text{залишок}\left(\frac{v}{5}\right) + 1\,,$$

$$a = v - S, \quad b = v + 2S, \quad K = v - S, \quad L = v + 2S, \quad \varepsilon = S\,.$$

Розв'язання задач варіанта 2

Задача 2.1. В кожному з 11 незалежних експериментів подія *A*
відбувається зі сталою ймовірністю 0,3. Обчислити всі ймовірності p_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, 11$, де k – частота події *A*. Побудувати графік ймовірності p_k. Обчислити найімовірнішу частоту.

Задано: $n = 11, \quad p = 0{,}3, \quad g = 1 - p = 0{,}7$.

Знайти: $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_{11}$ та k.

Розв'язання: Застосуємо формулу Бернуллі (1.12) та формулу (1.13). Значення p_0 обчислюємо за першою формулою, всі інші p_k – за другою.

Для формули (1.13) обчислюємо сталий множник

$$\frac{p}{g} = \frac{0{,}3}{0{,}7} = 0{,}4285714, \quad p_0 = C_{11}^0 \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{11} = 0{,}7^{11} = 0{,}0197732.$$

Результати обчислень запишемо в таблицю. Якщо обчислення вірні, повинна виконуватись рівність $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

k	$\frac{(n-k+1}{k}$	p_k	k	$\frac{(n-k+1}{k}$	p_k
0	–	0,0197732	7	5/7	0,0173282
1	11/1	0,0932168	8	4/8	0,0037131
2	10/2	0,1997503	9	3/9	0,0005304
3	9/3	0,2568218	10	2/10	0,0000454
4	8/4	0,2201330	11	1/11	0,0000017
5	7/5	0,1320798			
6	6/6	0,0566056	$\sum$	–	0,9999994

За найденими значеннями ймовірностей побудуємо їх графік (рис. 8).

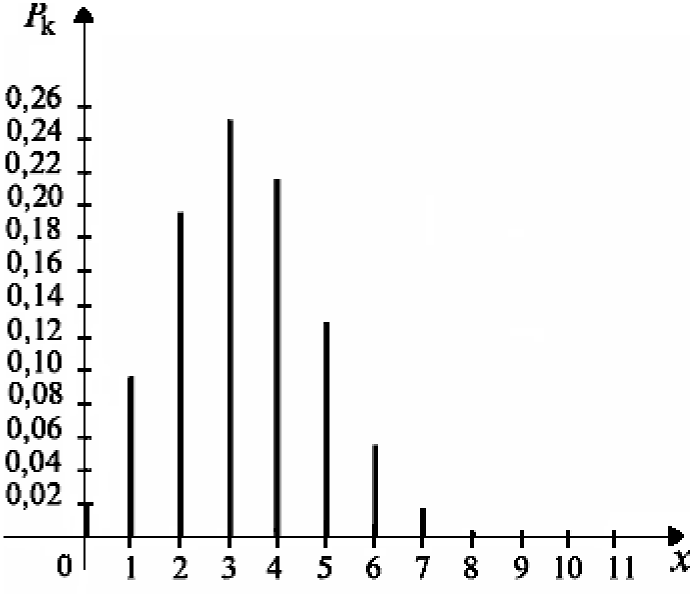

Рис. 8.

За заданими даними обчислимо найімовірнішу частоту:

$$np - g \le k \le np + p\,,$$

$$np - g = 11 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 = 3{,}3 - 0{,}7 = 2{,}6\,.$$

Отже, найімовірніша частота $k = 3$, як було отримано раніше, значення p_3 є максимальним.

Задача 2.2. В кожному з 500 незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю 0,4. Знайти ймовірність того, що подія A відбувається:

а) менше 190 разів;

б) точно 220 разів;

в) більше ніж 180 разів та менше 240 разів;

г) більше ніж 235 разів.

а). ***Задано***: $n = 500, \quad p = 0{,}4, \quad a = 0, \quad b = 190$.

Знайти: $P_{500}(k < 190)$.

Застосуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа (формула (1.16)).

Знаходимо: $\sqrt{npg} = \sqrt{500 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6} = \sqrt{120} \approx 10{,}95$

$$P_{500}(k < 190) = P_{500}(0 < k < 190) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$$

$$x_1 = \frac{a - np}{\sqrt{npg}}; \quad x_2 = \frac{b - np}{\sqrt{npg}}.$$

$$x_1 = \frac{0 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = -18{,}26; \quad x_2 = \frac{190 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = -0{,}913.$$

$$P_{500}(k < 190) = \Phi(-0{,}913) - \Phi(-18{,}26) = 0{,}1814.$$

б). ***Задано***: $n = 500, \quad p = 0{,}4, \quad k = 220$.

Знайти: $P_{500}(220)$.

Застосуємо локальну теорему Муавра-Лапласа (формула (1.14)):

$$P_{500}(220) \approx \frac{f(x)}{\sqrt{npg}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npg}}$$

$$x = \frac{220 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = 1{,}82; \ f(1{,}82) = 0{,}07614;$$

$$P_{500}(220) = \frac{0{,}07614}{10{,}95} = 0.00692.$$

в). ***Задано***: $n = 500, \quad p = 0{,}4, \quad a = 180, \quad b = 240$.

Знайти: $P_{500}(180 < k < 240)$.

Застосовуємо інтегральну теорему Муавра-Лапласа.

$$x_1 = \frac{180 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = -1{,}83; \quad \Phi(-1{,}83) = 0{,}0336;$$

$$x_2 = \frac{240 - 500 \cdot 0.4}{10{,}95} = 3{,}65; \quad \Phi(3{,}65) = 0{,}9998;$$

$$P_{500}(180 < k < 240) = \Phi(3{,}65) - \Phi(-1{,}83) = 0{,}9662.$$

г). ***Задано*:** $n = 500, \quad p = 0{,}4, \quad a = 235, \quad b = 500$.

***Знайти*:** $P_{500}(235 < k < 500)$.

Аналогічно пунктам а) та в), використаємо теорему Муавра-Лапласа.

$$x_1 = \frac{235 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = 3{,}19\ ; \qquad x_1 = \frac{500 - 500 \cdot 0{,}4}{10{,}95} = 27{,}4\ ;$$

$$\Phi(x_1) = 0{,}99929\ ; \qquad \Phi(x_2) = 1$$

$$P_{500}(235 < k < 500) = \Phi(27{,}4) - \Phi(3{,}19) = 0{,}0007\ .$$

Задача 2.3. На телефонній станції помилкове з'єднання відбувається з ймовірністю $\frac{1}{200}$. Знайти ймовірність того, що серед 200 з'єднань станеться:

а) точно 1 помилкове з'єднання;

б) менше ніж 3 помилкових з'єднань;

в) більше ніж 2 помилкових з'єднань.

Оскільки ймовірність події дуже мала, використовуємо формулу Пуассона (1.15).

а) ***Задано*:** $n = 200, \quad p = \frac{1}{200}, \quad k = 1$.

***Знайти*:** $P_{200}(1)$.

Одержимо $\lambda = n \cdot p = 200 \cdot \frac{1}{200} = 1$,

$$P_{200}(1) \approx \frac{\lambda}{1!} \cdot e^{-\lambda}, \qquad P_{200}(1) = 0{,}3679\ .$$

б) ***Задано*:** $n = 200, \quad p = \frac{1}{200}, \quad k < 3$.

***Знайти*:** $P_{200}(k < 3)$.

Маємо $\lambda = 1$,

$$P_{200}(k < 3) = P_{200}(0) + P_{200}(1) + P_{200}(2) = 0{,}3679 + 0{,}3679 + $$
$$+ 0{,}1839 = 0{,}9197.$$

в) ***Задано***: $n = 200, \quad p = \dfrac{1}{200}, \quad k > 2$.

Знайти: $\quad P_{200}(k > 2)$.

Перейдемо до протилежної події та використаємо попередній результат.

$P_{200}(k > 2) = 1 - P_{200}(k \le 2) = 1 - P_{200}(k < 3) = 1 - 0{,}9197 = 0{,}0803$.

Задача 2.4. В кожному з 600 незалежних експериментів подія A відбувається зі сталою ймовірністю 0,85. Знайти ймовірність того, що відносна частота $k/600$ цієї події відрізняється від ймовірності 0,85 за абсолютною величиною не більше ніж на 0,011.

Задано: $\quad n = 600, \quad p = 0{,}85 \quad \varepsilon = 0{,}011$.

Знайти: $\quad P_{600}\left(\left|\dfrac{k}{600} - 0{,}85\right| < 0{,}011\right)$.

Розв'язуємо цю задачу, застосовуючи формулу (1.18). Маємо

$$P_{600}\left(\left|\frac{k}{600} - 0{,}85\right| < 0{,}011\right) = 2\Phi\left(0{,}011 \cdot \sqrt{\frac{600}{0{,}85 \cdot 0{,}15}}\right) - 1 =$$

$$= 2\Phi(0{,}75) - 1 = 2 \cdot 0{,}77337 - 1 = 0{,}54674.$$

Задача 2.5. Випадкова величина X задана рядом розподілення

X	3	5	7	11
P	0,14	0,2	0,49	0,17

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини X та побудувати її графік. Обчислити математичне очікування $M(x)$ та дисперсію $D(x)$.

Функцію розподілення знаходимо за формулами (1.20) та (1.21) для дискретних випадкових величин:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 3, \\ 0{,}14, & 3 < x \le 5, \\ 0{,}34, & 5 < x \le 7, \\ 0{,}83, & 7 < x \le 11, \\ 1, & x > 11 \end{cases}$$

Графік функції розподілення $F(x)$ показаний на рис. 9.

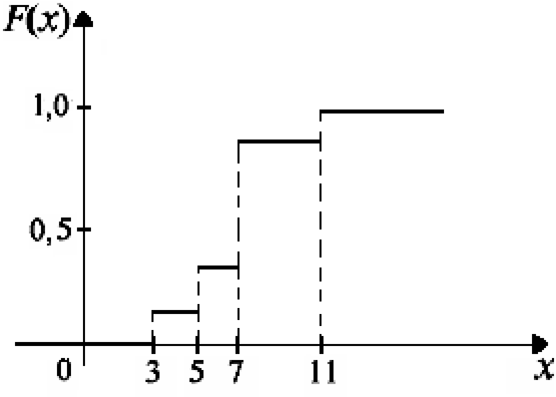

Рис. 9.

Математичне очікування $M(x)$ обчислюють за формулою (1.27):

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}49 + 11 \cdot 0{,}17 = 6{,}72 .$$

Для знаходження дисперсії застосуємо формули (1.30) та (1.32):

$$M(X^2) = 3^2 \cdot 0{,}14 + 5^2 \cdot 0{,}2 + 7^2 \cdot 0{,}49 + 11^2 \cdot 0{,}17 = 50{,}84 ,$$

$$D(X) = 50{,}84 - 6{,}72^2 = 5{,}6816 .$$

Задача 2.6. Випадкова величина *X* задана функцією густини ймовірності

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ ax, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілення $F(x)$ випадкової величини *X*. Побудувати графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$. Обчислити математичне очікування $M(x)$ та дисперсію $D(X)$.

***Задано*:** $f(x)$.

***Знайти*:** $F(x)$, $M(x)$, $D(X)$.

Попередньо обчислимо невідому сталу a. Для цього згадаємо властивості функції розподілення: $F(\infty)=1$. Отже, згідно з формулою (1.23), маємо:

$$F(\infty)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{+\infty} f(x)dx=\left.\frac{ax^2}{2}\right|_0^2=1.$$

Звідкіля $2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Враховуючи отриманий результат, функція розподілення $F(x)$ (див. формулу (1.22)) має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ та $F(x)$ (рис. 9 та 10).

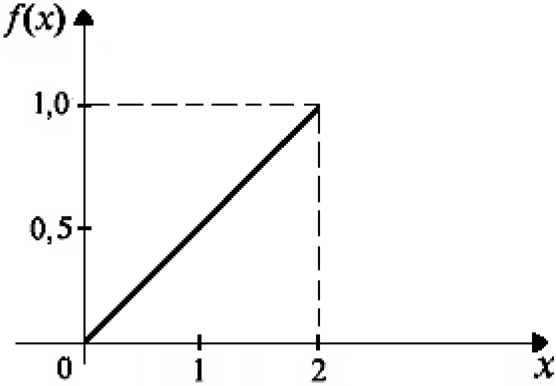

Рис. 10.

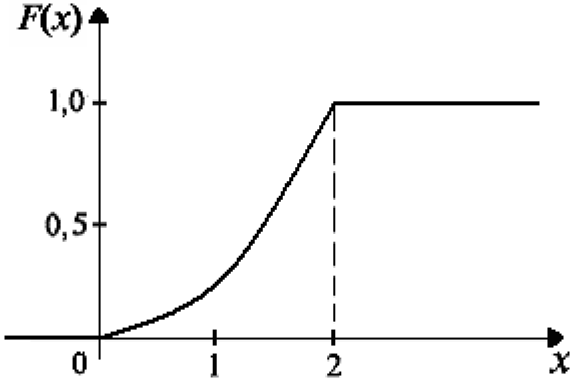

Рис. 11.

Математичне очікування $M(x)$ обчислюємо за формулою (1.28):

$$M(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 = \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}.$$

Для знаходження дисперсії x застосуємо формулу (1.34):

$$M(X) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \left.\frac{x^4}{8}\right|_0^2 = \frac{16}{8} = 2;$$

$$D(X) = 2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.$$

Задача 2.7. Задана нормально розподілена випадкова величина X. Знайти ймовірність того, що ця випадкова величина приймає значення:

а) в інтервалі [-1, 2];

б) менше -1;

в) більше 2;

г) що відрізняється від свого середнього значення не більше ніж на 1.

У перших трьох випадках застосовуємо формулу (1.45), а в четвертому – формулу (1.46).

а). ***Задано*:** $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad a = -1, \quad b = 2$.

***Знайти*:** $P(-1 \le X \le 2)$.

Маємо

$$P(-1 \le X \le 2) = \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-0{,}5) =$$
$$= \Phi(1) - 1 + \Phi(0{,}5) = 0{,}84134 - 1 + 0{,}69146 = 0{,}53280.$$

б). ***Задано*:** $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad a = -\infty, \quad b = -1$.

***Знайти*:** $P(X \le -1)$.

Одержимо

$$P(X \le -1) = P(-\infty < X \le -1) = \Phi\left(\frac{-1-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-0}{2}\right) =$$
$$= \Phi(-0{,}5) - \Phi(-\infty) = 1 - \Phi(0{,}5) - 0 = 1 - 0{,}69146 = 0{,}30854.$$

в). ***Задано*:** $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad a = 2, \quad b = \infty$.

***Знайти*:** $P(X \ge 2)$.

Маємо

$$P(X \ge 2) = P(2 \le X < \infty) = \Phi\left(\frac{\infty-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) =$$
$$= \Phi(\infty) - \Phi(1) = 1 - 0{,}84134 = 0{,}1586.$$

г). ***Задано*:** $\mu = 0, \quad \sigma = 2, \quad \varepsilon = 1$.

***Знайти*:** $P(|X - 0| \le 1)$.

Одержимо

$$P(|X - 0| \le 1) = 2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 2 \cdot 0{,}69146 - 1 = 0{,}38292.$$

§ 3. Первинна обробка вибірок

1. Генеральна сукупність та вибірка. Сукупність об'єктів, або точніше, сукупність значень якихось ознак об'єктів, називається ***генеральною сукупністю***. Основним завданням математичної статистики є дослідження ймовірностних властивостей сукупності. Сюди можна віднести: розробку методів збору та групування статистичних даних; оцінку невідомої ймовірності події; оцінку невідомого розподілення або оцінку параметрів розподілення, вид якого відомий; перевірку статистичних гіпотез про вид розподілення або про величину параметрів розподілення.

Але повне дослідження генеральної сукупності неекономне або практично неможливе. Наприклад, при перевірці електричних лампочок однією з якісних властивостей є час роботи (до згоряння). Аналогічна ситуація має місце при перевірці якості консервів, снарядів та ін. Крім того, загальна перевірка генеральної сукупності потребує великих матеріальних витрат. Тому загальні дослідження проводять рідко. Наприклад, загальний перепис населення проводять приблизно раз на 10 років.

Як правило з генеральної сукупності роблять вибірку, тобто досліджують тільки деякі її об'єкти. За допомогою вибірки оцінюють генеральну сукупність за ймовірностними властивостями.

Для того, щоб оцінки були вірогідними, вибірка повинна бути ***представницькою***, тобто її ймовірностні властивості повинні співпадати або бути близькими до властивостей генеральної сукупності.

Представницьку вибірку можна отримати, якщо об'єкти для досліджування обирати випадково, тобто гарантувати всім об'єктам генеральної сукупності однакову ймовірність підпадати досліджуванню. Крім того, припустимо, що всі вибірки отримані з генеральної сукупності випадково.

Випадково обраний об'єкт після перевірки потрібного признаку можна повернути (***повторна вибірка***) або не повернути (***безповторна вибірка***) до генеральної сукупності. В першому випадку отримаємо більш незалежну та представницьку вибірку.

Часто під генеральною сукупністю розуміють піддослідну випадкову величину. Для випадкової величини при сталих умовах виконують експерименти. Сукупність одержаних результатів (значень) теж називають вибіркою і обробляють статистичними методами. В обох випадках методи обробки вибірки аналогічні.

При дослідженні об'єктів можна фіксувати або заміряти значення одного або декількох ознак. Відповідно говорять про ***одномірні, двомірні, трьохмірні*** і т.д. вибірки.

2. Варіаційний ряд. Вибір об'єкта з генеральної сукупності та вимірювання значення властивості називається статистичним спостереженням. Результати спостережень фіксують у протоколі спостережень у порядку їх появи.

Вибірка буде більш наочною, якщо всі її елементи упорядкувати по зростанню або зменшенню. Але у вибірці одне й те саме значення (варіант) може зустрічатися декілька разів, тому доцільно результати записати у вигляді таблиці, у першій колонці якої знаходяться можливі значення (варіанти) x_i генеральної сукупності (або випадкової величини) *X,* а у другій – числа n_i, тобто частоти появи *i*-го значення. Таку таблицю називають ***варіаційною таблицею*** **або** ***варіаційним рядом*****.**

Для створення варіаційного ряду необхідно:

1) знайти мінімальне ($x_{\min}$) та максимальне ($x_{\max}$) значення вибірки;

2) в перший стовпчик таблиці записати варіанти значень випадкової величини (генеральної сукупності), починаючи з $x_{\min}$ і закінчуючи $x_{\max}$;

3) продивитись по одному всі елементи вибірки в протоколі спостережень та відмітити кожне значення у відповідному варіанті у другому стовпчику таблиці;

4) підрахувати кількість відміток для кожного варіанта та записати відповідне число n_i;

5) підрахувати кількість елементів у вибірці (об'єм вибірки) *n*, яке повинне дорівнювати

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i \,, \qquad (2.1)$$

де m – кількість варіантів у варіаційному ряді. Якщо умова (2.1) не виконана, треба повторити всі пункти, починаючи з третього.

Якщо кількість варіантів m дуже велика або близька до об'єму вибірки, доцільно складати ***варіаційний ряд по інтервалах значень генеральної сукупності***.

Варіаційний ряд по інтервалах значень можна отримати за допомогою наведеного вище алгоритму, де у другому пункті належить: заповнити перший стовпчик таблиці інтервалами значень генеральної сукупності. Всі інтервали обирають однакової довжини таким чином, щоб $x_{\min}$ увійшло до першого, а $x_{\max}$ – до останнього інтервалу. Звичайно початок інтервалу входить в інтервал, а його кінець – не входить. В останніх пунктах алгоритму необхідно слово «варіант» замінити словом «інтервал».

3. Графіки варіаційних рядів. При побудові графіків за звичай використовують відносні частоти або частості $\frac{n_i}{n}$. Сума частостей повинна дорівнювати одиниці:

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} = 1. \tag{2.2}$$

Використовують два види графіків варіаційних рядів: ***полігон та гістограма***. Якщо варіаційний ряд складений за значеннями, то полігон викреслюють з відрізків, які з'єднують точки з координатами x_i та відповідні частості $\frac{n_i}{n}$. При побудові гістограми над кожним значенням x_i будують прямокутник, висота якого пропорційна відповідній частості $\frac{n_i}{n}$. Приклади полігону та гістограми надані на сторінці 77 (рис. 12 та 13).

Якщо варіаційний ряд складений за інтервалами, в якості x_i треба розглядати середини інтервалів.

4. Емпірична функція розподілення. Кожна генеральна сукупність має функцію розподілення $F(x)$ (див. формулу (1.19)), яка за звичай невідома. По вибірці можна знайти емпіричну функцію розподілення $F^*(x)$. Процес пошуку емпіричної функції розподілення $F^*(x)$ аналогічний процесу пошуку функції розподілення $F(x)$ дискретної випадкової величини X (див. формули (1.20) та (1.21)):

$$F^*(x) = \sum_{x_i < x} \frac{n_i}{n}, \tag{2.3}$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ \dfrac{n_1}{n}, & x_1 < x \le x_2, \\ \dfrac{n_1 + n_2}{n}, & x_2 < x \le x_3, \\ \dots & \dots \\ \sum\limits_{i=1}^{m-1} \dfrac{n_i}{n}, & x_{m-1} < x \le x_m, \\ 1, & x > x_m. \end{cases} \tag{2.4}$$

Значеннями емпіричної функції розподілення $F^*(x)$ (див. (2.4)) є так звані ***накопичені частості***. Графік емпіричної функції розподілення будують так само, як і графік функції розподілення $F(x)$ дискретної випадкової величини.

Якщо варіаційний ряд складений за інтервалами значень і в якості «представника» інтервалу беруть його середину, то емпірична функція складається так само, як по варіаційному ряду за значенням. Але в якості представника інтервалу можна брати і правий кінець інтервалу. Об'єднуючи відрізками точки, координатами яких є праві кінці інтервалів та накопичені частості відповідних інтервалів, одержимо ламану лінію, яка є дуже гарним наближенням графіка функції розподілення безперервної випадкової величини. Такий графік буде точний, якщо всі значення у кожному інтервалі розподілені рівномірно. Аналітичний вид цієї функції доволі складний.

5. Числові характеристики вибірки.

5.1. Середнє арифметичне. ***Середнє арифметичне*** $\overline{x}$ визначається за формулою

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \ , \qquad (2.5)$$

де x_i – елементи вибірки, n – об'єм вибірки.

Якщо об'єм вибірки невеликий та x_i не дуже великі, розрахунок «вручну» по цій формулі не викликає труднощів. Якщо об'єм вибірки великий, потрібно застосовувати комп'ютер.

Якщо складений варіаційний ряд, треба використати таку формулу:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i \ , \qquad (2.6)$$

де x_i – варіанти випадкової величини,

n_i – відповідні частоти,

m – кількість варіантів,

n – об'єм вибірки.

Для спрощення розрахунків існує така формула:

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \frac{x_i - c}{k}}{n} \cdot k + c \ , \qquad (2.7)$$

де x_i, n_i, m, та n мають той же зміст, що і у попередній формулі;

k – крок таблиці, тобто інтервал між сусідніми варіантами;

c – довільна стала (але для спрощення треба обрати варіант, що має максимальну частоту).

В результаті при обчисленнях доводиться мати справу з доволі малими числами. Формулу (2.7) застосовують у випадку, коли варіаційний ряд має сталий крок таблиці k, коли крок змінний – застосовують формулу (2.6).

Якщо варіаційний ряд складений за інтервалами значень, в якості x_i у формулах (2.6) та (2.7) використовують середини інтервалів.

Розрахунки за формулами (2.5) та (2.6) можна спростити, якщо перетворити змінні величини $y_i = x_i - c$, де стала c обирається поблизу середини інтервалу, в якому знаходяться всі значення вибірки. Таким чином, нові значення варіантів y_i одержані як відхилення старих варіантів від «штучного нуля» c, тобто вони доволі малі за абсолютною величиною. Формули (2.5) та (2.6) приймають вигляд:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c) + c\,; \tag{2.5a}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - c)n_i + c\,. \tag{2.6a}$$

5.2. Дисперсія вибірки. Дисперсію вибірки позначимо $\bar{S}^2$. Для обчислення дисперсії $\bar{S}^2$ вибірки наведемо формули, які аналогічні формулам для обчислення середнього арифметичного:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \bar{x}^2\,; \tag{2.8}$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 n_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 n_i - \bar{x}^2\,; \tag{2.9}$$

$$\bar{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i}{n}k^2 - (\bar{x} - c)^2\,. \tag{2.10}$$

Для спрощення розрахунків формули (2.8) та (2.9) можна перетворити таким чином:

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)^2 - (\bar{x} - c)^2\,; \tag{2.8a}$$

$$\bar{S}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}(x_i - c)^2 n_i - (\bar{x} - c)^2\,. \tag{2.9a}$$

5.3. Стандартне відхилення. Стандартне, або середньоквадратичне, відхилення визначається як квадратний корінь з дисперсії: $\bar{S} = \sqrt{\bar{S}^2}$.

§ 4. Теорія оцінок

1. Поняття оцінки. Генеральні сукупності характеризуються деякими сталими числовими характеристиками розподілення. За вибірками можна знайти оцінки цих характеристик. Внаслідок випадковості вибірки значення оцінок тієї самої числової характеристики, обчислені по різних вибірках генеральної сукупності, бувають, за звичай, різними.

Позначимо невідомий параметр розподілення, тобто числову характеристику генеральної сукупності x, через θ, а оцінку невідомого параметра – через T_n. Оцінка T_n – функція від вибірки. Наприклад, якщо треба оцінити середнє значення $\theta = \mu$ нормального розподілення, то можна використати такі оцінки:

- x_1 – перший елемент вибірки. На практиці часто так і роблять, деяку величину вимірюють тільки один раз і цей результат використовують як значення цієї величини;
- $(x_{\max} + x_{\min})/2$ – середнє арифметичне максимального та мінімального елементів вибірки;
- $\bar{x}$ – середнє арифметичне.

Щоб з'ясувати яка з оцінок краща, потрібно знати основні властивості (види) оцінок.

2. Незмінні оцінки. *Незмінною* називають оцінку T_n, середнє значення якої дорівнює самому параметру θ який оцінюють:

$$M(T_n) = \theta . \tag{2.11}$$

Якщо ця умова не виконується, то оцінку називають зміщеною, при цьому зміщення обчислюють як різницю $M(T_n) - \theta$.

Інші властивості оцінок у цьому посібнику не розглядаються.

Незміщеною оцінкою математичного очікування μ є середнє арифметичне $\bar{x}$.

Аналогічно, за допомогою вибіркової дисперсії $\bar{S}^2$ можна оцінити дисперсію σ^2. Виявляється, що вибіркова дисперсія $\bar{S}^2$ є ***зміщеною оцінкою дисперсії*** σ^2 **:**

$$M\left(\overline{S}^2\right)=\frac{n-1}{n}\sigma^2, \tag{2.12}$$

тобто $\sigma^2-\frac{n-1}{n}\sigma^2=\frac{1}{n}\sigma^2$. Звідси видно, що при $n\to\infty$ зміщення прагне до нуля. Отже, при достатньо великому об'ємі вибірки n вибіркову дисперсію можна наближено приймати за незміщену оцінку дисперсії σ^2.

Для оцінки дисперсії, незміщеної при малому об'ємі вибірки, застосовують ***виправлену дисперсію***

$$S^2=\frac{n}{n-1}\overline{S}^2 \tag{2.13}$$

3. Довірчий інтервал. Оцінки T_n невідомого параметру θ, котрі розглянуті вище, називають ***точковими***, оскільки вони визначають одне значення, одну точку на числовій осі. Всі точкові оцінки параметрів розподілення генеральної сукупності обчислюють за вибірками, але через випадковість вибірок ***оцінки являються випадковими величинами***, що відрізняються від сталого дійсного значення параметра θ. Позначимо $\Delta\ (\Delta>0)$ точність оцінки, тоді

$$|\theta-T_n|\le\Delta.$$

Оцінка буде тим точніша, чим менше Δ. Кожну точність можна одержати з деякою ймовірністю (***надійністю***):

$$P\left(|\theta-T_n|\le\Delta\right)=\gamma \tag{2.14}$$

Якщо перетворити цей вираз, отримаємо

$$P(-\Delta\le\theta-T_n\le\Delta)=\gamma,$$

або

$$P(T_n-\Delta\le\theta<T_n+\Delta)=\gamma. \tag{2.15}$$

Умова (2.15) означає, що інтервал $[T_n-\Delta,\quad T_n+\Delta]$ накриває значення параметра θ із заданою ***довірчою ймовірністю*** $\boldsymbol{\gamma}$. Точність оцінки Δ фактично визначає ***довжину довірчого інтервалу*** **(2Δ)**. Довірча ймовірність γ, як правило, задається значенням близьким до одиниці, наприклад, 0,95; 0,98; 0,99 і т.д.

Довірча ймовірність γ, точність оцінки Δ та об'єм вибірки n зв'язані між собою. Якщо визначені дві величини, тим самим буде визначена і третя.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні задачі математичної статистики.
2. Назвіть основні параметри математичної статистики.
3. Що називається варіаційним рядом?
4. Що називається емпіричною функцією розподілення?
5. Що таке полігон та гістограма?
6. Назвіть числові характеристики статистичного розподілення.
7. Яка оцінка параметру називається незміщеною?
8. Яка оцінка для математичного очікування буде незміщеною? Назвіть незміщену оцінку для дисперсії.
9. Що називається довірчим інтервалом та довірчою ймовірністю?
10. Чому дорівнює довжина довірчого інтервалу?

Робота 3

Задача 3.1. По вибірці *A* розв'язати наступні завдання:

- скласти варіаційний ряд;
- обчислити відносні частоти та накопичені частості;
- побудувати графіки варіаційного ряду (полігон та гістограму);
- скласти емпіричну функцію розподілення;
- побудувати графік емпіричної функції розподілення;
- обчислити середнє арифметичне $\bar{x}$, дисперсію $\bar{S}^2$, стандартне відхилення $\bar{S}$.

Задача 3.2. Для стовпчиків *X*, *Y* та *Z* вибірки *C* обчислити числові характеристики $(\bar{x}, \bar{S}^2, \bar{S})$. За бажанням можна скласти варіаційні ряди за значеннями.

Задача 3.3. Обчислити незміщені оцінки параметрів генеральної сукупності $\bar{x}, S^2, S$ за вибірками *A* та *C*, використовуючи результати отримані у попередніх задачах.

Розв'язання задач варіанта 3

Задача 3.1. Спочатку розв'яжемо задачу по вибірці *A*:

2	4	2	4	3	3	3	2	0	6	1	2	3	2	2	4	3	3	5	1
0	2	4	3	2	2	3	3	1	3	3	3	1	1	2	3	1	4	3	1
7	4	3	4	2	3	2	3	3	1	4	3	1	4	5	3	4	2	4	5
3	6	4	1	3	2	4	1	3	1	0	0	4	6	4	7	4	1	3	

Знаходимо: $x_{\min} = 0$ та $x_{\max} = 7$. Розмах (7 – 0 + 1 = 8) доволі малий, тому складаємо варіаційний ряд за значеннями. Всі відносні частоти обчислюємо з однаковою точністю.

x_i	n_i	n_i/n	Накопичені частості
0	4	0,0506	0,0506
1	13	0,1646	0,2152
2	14	0,1772	0,3924
3	24	0,3038	0,6962
4	16	0,2025	0,8987
5	3	0,0380	0,9367
6	3	0,0380	0,9747
7	2	0,0253	1,0000
$\sum$	79	1,0000	–

При побудові графіків зображаємо на осі *x* значення від 0 до 7 і на осі n_i/n – значення від 0 до 0,3 (рис. 12 та 13).

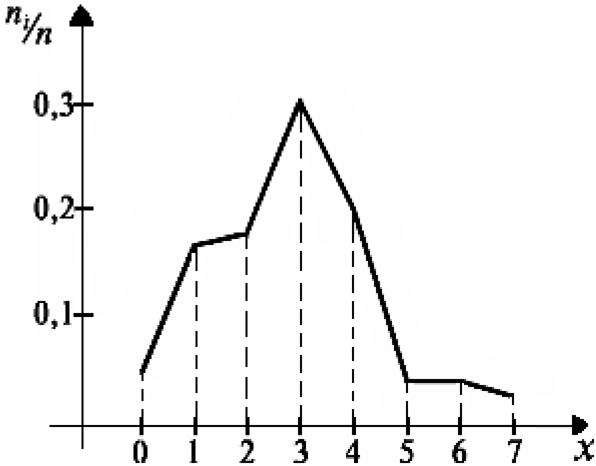

Рис. 12. Полігон варіаційного ряду

Емпіричну функцію розподілення $F^*(x)$ знаходимо, використовуючи формулу (2.4) та накопичені частості:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}0506 & 0 < x \le 1, \\ 0{,}2152, & 1 < x \le 2, \\ 0{,}3924, & 2 < x \le 3, \\ 0{,}6962, & 3 < x \le 4, \\ 0{,}8987, & 4 < x \le 5, \\ 0{,}9367, & 5 < x \le 6, \\ 0{,}9747, & 6 < x \le 7 \\ 1, & x > 7. \end{cases}$$

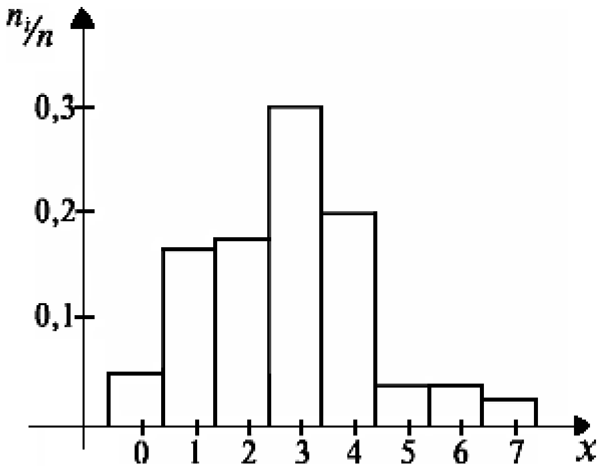

Рис. 13. Гістограма варіаційного ряду

При побудові графіка $F^*(x)$ відкладаємо значення функції в інтервалі від 0 до 1.

Обчислення сум для середнього арифметичного та дисперсії за формулами (2.7) та (2.10) та по варіаційному ряду оформляємо як таблицю.

По максимальній частоті визначаємо $c = 3$, а крок таблиці $k = 1$.

x_i	n_i	$\frac{x_i - c}{k}$	$\frac{x_i - c}{k} n_i$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2$	$\left(\frac{x_i - c}{k}\right)^2 n_i$
0	4	–3	–12	9	36
1	13	–2	–26	4	52
2	14	–1	–14	1	14
3	24	0	0	0	0
4	16	1	16	1	16
5	3	2	6	4	12
6	3	3	9	9	27
7	2	4	8	16	32
$\sum$	79	–	–13	–	189

Далі за формулою (2.7) обчислюємо середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{-13}{79} \cdot 1 + 3 = -0{,}16 + 3 = 2{,}84$$

і за формулою (2.10) – дисперсію

$$\bar{S}^2 = \frac{189}{79} \cdot 1 - (2{,}84 - 3)^2 = 2{,}3924 - 0{,}0256 = 2{,}3668.$$

Стандартне відхилення

$$\bar{S} = \sqrt{2{,}3668} = 1{,}54\,.$$

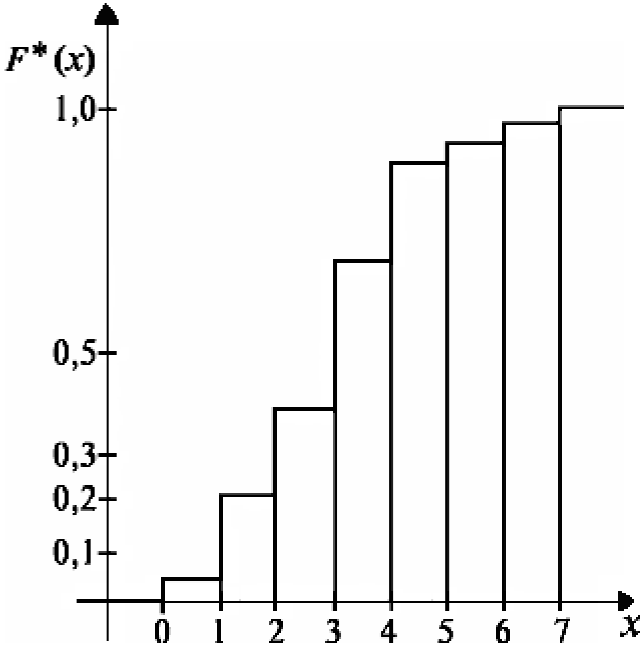

Рис. 14. Графік емпіричної функції по вибірці А

Задача 3.2.

X: 73 69 72 72 65 67 56 70 63 64 70 67 60 63 80 71 74 68 65 73

Y: –291 –270 –279 –282 –254 –264 –216 –276 –248 –253 –276 –262 –234 –243 –313 –278 –292 –271 –256 –291

Z: 577 548 575 573 519 530 443 555 502 506 554 535 478 495 635 564583 534 518 574

По заданих вибірках видно, що не має сенсу складати варіаційний ряд за значеннями, тому що у вибірці мало елементів, що повторюються. Для розрахунків використовуємо формули (2.5) та (2.6) або (2.5*a*) та (2.6*a*). У даному випадку треба віддати перевагу останнім формулам, оскільки при розрахунках прийдеться мати справу з меншими величинами.

Розрахунки оформлюємо як таблицю.

x_i	(x_i-c)	$(x_i-c)^2$	y_i	(y_i-c)	$(y_i-c)^2$	z_i	(z_i-c)	$(z_i-c)^2$
73	3	9	–291	–41	1681	577	27	729
69	–1	1	–270	–20	400	548	–2	4
72	–2	4	–279	–29	841	575	25	625
72	–2	4	–282	–32	1024	573	23	529
65	–5	25	–254	–4	16	519	–31	961
67	–3	9	–264	–14	196	530	–20	400
56	–14	196	–216	34	1156	443	–107	11449
70	0	0	–276	–26	676	555	5	25
63	–7	49	–248	–2	4	502	–48	2304
64	–6	36	–253	–3	9	506	–44	1936
70	0	0	–276	–26	676	554	4	16
67	–3	9	–262	–12	144	535	–15	225
60	–10	100	–234	16	256	478	–72	5184
63	–7	49	–243	7	49	495	–55	3025
80	10	100	–313	–63	3969	635	85	7225
71	1	1	–278	–28	784	564	14	196
74	4	16	–292	–42	1764	583	33	1089
68	–2	4	–271	–21	441	534	–16	256
65	–5	25	–256	–6	36	518	–32	1024
73	3	9	–291	–41	1681	574	24	576
$\sum$	–38	646	$\sum$	–349	15803	$\sum$	–202	37778

Маємо: $X_{\min} = 56,\ X_{\max} = 80,\ c = 70,\ n = 20,$

$$\overline{X} = \frac{-38}{20} + 70 = -1{,}9 + 70 = 68{,}1\,,$$

$$\overline{S}_x^2 = \frac{646}{20} - (68{,}1 - 70)^2 = 32{,}3 - 1{,}9^2 = 32{,}3 - 3{,}61 = 28{,}69\,,$$

$$\overline{S}_x = \sqrt{28{,}69} = 5{,}36\,;$$

$Y_{\min} = -313, Y_{\max} = -216, c = -250, n = 20,$

$$\overline{Y} = \frac{-349}{20} - 250 = -17{,}45 - 250 = -267{,}45\ ,$$

$$\overline{S}_y^2 = \frac{15803}{20} - (-267{,}45 + 250)^2 = 790{,}15 - 304{,}50 = 485{,}65\ ,$$

$$\overline{S}_y = \sqrt{485{,}65} = 22{,}0\,;$$

$Z_{\min} = 443, Z_{\max} = 635, c = 550, n = 20\,,$

$$\overline{Z} = \frac{-202}{20} + 550 = -10{,}1 + 550 = 539{,}9\ ,$$

$$\overline{S}_z^2 = \frac{37778}{20} - (539{,}9 - 550)^2 = 1888{,}9 - 102{,}01 = 1786{,}89\ ,$$

$$\overline{S}_z = \sqrt{1786{,}89} = 42{,}3\,.$$

Задача 3.3. При розв'язанні задачі 3.1 для вибірки A була отримана незміщена оцінка середнього значення $\overline{x} = 2{,}84$, а також вибіркова дисперсія $\overline{S}^2 = 2{,}3668$. За формулою (2.13) знаходимо незміщені оцінки дисперсії та стандартного відхилення:

$$n = 79, \quad S^2 = \frac{79}{78} \cdot 2{,}3668 = 2{,}3971, \quad S = \sqrt{2{,}3971} = 1{,}55\,.$$

За результатами задачі 3.2:

$$n = 20, \quad \overline{x} = 68{,}1, \quad S_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 28{,}29 = 29{,}779,$$

$$S_x = \sqrt{29{,}779} = 5{,}457.$$

$$n = 20, \quad \overline{y} = -267{,}45, \quad S_y^2 = \frac{20}{19} \cdot 485{,}65 = 511{,}21,$$

$$S_y = \sqrt{511{,}21} = 22{,}61.$$

$$n = 20, \quad \overline{z} = 539{,}9, \quad S_z^2 = \frac{20}{19} \cdot 1786{,}89 = 1880{,}94,$$

$$S_z = \sqrt{1880{,}94} = 43{,}37.$$

Додаток 1

Функція густини ймовірності нормального розподілення

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	39894	39892	39886	39876	39862	39844	39822	39797	39767	39733
0,1	39695	39654	39608	39559	39505	39448	39387	39322	39253	39181
0,2	39104	39024	38940	38853	38762	38667	38568	38466	38361	38251
0,3	38139	38023	37903	37780	37654	37524	37391	37255	37115	36973
0,4	36827	36678	36526	36371	36213	36053	35889	35723	35553	35381
0,5	35207	35029	34849	34667	34482	34294	34105	33912	33718	33521
0,6	33322	33121	32918	32713	32506	32297	32086	31874	31659	31443
0,7	31225	31006	30785	30563	30339	30114	29887	29659	29430	29200
0,8	28969	28737	28504	28269	28034	27798	27562	27324	27086	26848
0,9	26609	26369	26129	25888	25647	25406	25164	24923	24681	24439
1,0	24197	23955	23713	23471	23230	22988	22747	22506	22265	22025
1,1	21785	21546	21307	21069	20831	20594	20327	20121	19886	19652
1,2	19419	19186	18954	18724	18494	18265	18037	17810	17585	17360
1,3	17137	16915	16694	16474	16256	16038	15822	15608	15395	15183
1,4	14973	14764	14556	14350	14146	13943	13742	13542	13344	13147
1,5	12952	12758	12566	12376	12188	12001	11816	11632	11450	11270
1,6	11092	10915	10741	10567	10396	10226	10059	09893	09728	09566
1,7	09405	09246	09089	08933	08780	08628	08478	08329	08183	08038
1,8	07895	07754	07614	07477	07341	07206	07074	06943	06814	06687
1,9	06562	06438	06316	06195	06077	05959	05844	05730	05618	05508
2,0	05399	03292	05186	05082	04980	04879	04780	04682	04586	04491
2,1	04398	04307	04217	04128	04041	03955	03871	03788	03706	03626

2,2	03547	03470	03394	03319	03246	03174	03103	03034	02965	02898
2,3	02833	02768	02705	02643	02582	02522	02463	02406	02349	02294
2,4	02239	02186	02134	02083	02033	01984	01936	01888	01842	01794
2,5	01753	01709	0667	01625	01585	01545	01506	01468	01431	01394
2,6	01358	01323	01289	01256	01223	01191	01160	01130	01100	01071
2,7	01042	01014	00987	00961	00935	00909	00885	00861	00837	00814
2,8	00792	00770	00748	00727	00707	00687	00668	00649	00631	00613
2,9	00595	00578	00562	00545	00530	00514	00499	00485	00470	00457
3,0	00443	00430	00417	00405	00393	00381	00371	00358	00348	00337
3,1	00327	00317	00307	00298	00288	00279	00271	00262	00254	00246
3,2	00238	00231	00224	00216	00210	00203	00196	00190	00184	00178
3,3	00172	00167	00161	00156	00151	00146	00141	00136	00132	00127
3,4	00123	00119	00115	00111	00107	00104	00100	00097	00094	00090
3,5	00087	00084	00081	00079	00076	00073	00071	00068	00066	00063
3,6	00061	00059	00057	00055	00053	00051	00049	00047	00046	00044
3,7	00042	00041	00039	00038	00037	00035	00034	00033	00031	00030
3,8	00029	00028	00027	00026	00025	00024	00023	00022	00021	00021
3,9	00020	00019	00018	00018	00017	00016	00016	00015	00014	00014
4,0	00013	00009	00006	00004	00002	00002	00001	00001	00000	00000

Додаток 2

Функція розподілення нормального розподілення

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	50000	50399	50798	51197	51595	51994	52392	52790	53188	53586
0,1	53983	54380	54776	55172	55567	55962	56356	56749	57142	57535
0,2	57926	58317	58706	59095	59483	59871	60257	60642	61026	61409
0,3	61791	62172	62552	62930	63307	63683	64058	64431	64803	65173
0,4	65542	65910	66276	66640	67003	67364	67724	68082	68439	68793
0,5	69146	69497	69847	70194	70540	70884	71226	71566	71904	72240
0,6	72575	72907	73237	73565	73891	74215	74537	74857	75175	75490
0,7	75804	76115	76424	76730	77035	77337	77637	77935	78230	78524
0,8	78814	79103	79389	79673	79955	80234	80511	80785	81057	81327
0,9	81594	81859	82121	82381	82639	82894	83147	83398	83646	83891
1,0	84134	84375	84614	84850	85083	85314	85543	85769	85993	86214
1,1	86433	86650	86864	87076	87286	87493	87698	87900	88100	88298
1,2	88493	88686	88877	89065	89251	89435	89617	89796	89973	90147
1,3	90320	90490	90658	90824	90988	91149	91308	91466	91621	91774
1,4	91924	92073	92220	92364	92507	92647	92786	92922	93056	93189
1,5	93319	93448	93574	93699	93822	93943	94062	94179	94295	94408
1,6	94520	94630	94738	94845	94950	95053	95154	95254	95352	95449
1,7	95543	95637	95728	95818	95907	95994	96080	96164	96246	96327
1,8	96407	96485	96562	96638	96712	96784	96856	96926	96995	97062
1,9	97128	97193	97257	97320	97381	97441	97500	97558	97615	97670
2,0	97725	97778	97831	97882	97932	97982	98030	98077	98124	98169
2,1	98214	98257	98300	98341	98382	98422	98461	98500	98537	98574

2,2	98610	98645	98679	98713	98745	98778	98809	98840	98870	98899
2,3	98928	98956	98983	99010	99036	99061	99086	99111	99134	99158
2,4	99180	99202	99224	99245	99266	99286	99305	99324	99343	99361
2,5	99379	99396	99413	99430	99446	99461	99477	99492	99506	99520
2,6	99534	99547	99560	99573	99585	99598	99609	99621	99632	99643
2,7	99653	99664	99674	99683	99693	99702	99711	99720	99728	99736
2,8	99744	99752	99760	99767	99774	99781	99788	99795	99801	99807
2,9	99813	99819	99825	99831	99836	99841	99846	99851	99856	99861
3,0	99865	99869	99874	99878	99882	99886	99889	99893	99896	99900
3,1	99903	99906	99910	99913	99916	99918	99921	99924	99926	99929
3,2	99931	99934	99936	99938	99940	99942	99944	99946	99948	99950
3,3	99952	99953	99955	99957	99958	99960	99961	99962	99964	99965
3,4	99966	99968	99969	99970	99971	99972	99973	99974	99975	99976
3,5	99977	99978	99978	99979	99980	99981	99981	99982	99983	99983
3,6	99984	99985	99985	99986	99986	99987	99987	99988	99988	99989
3,7	99989	99990	99990	99990	99991	99991	99992	99992	99992	99992
3,8	99993	99993	99993	99994	99994	99994	99994	99995	99995	99995
3,9	99995	99995	99996	99996	99996	99996	99996	99996	99997	99997
4,0	99997	99998	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999	99999

Додаток 3

Варіант 1

Вибірка *A*

0	4	2	0	5	1	1	3	0	2	2	4	3	2	3	3	0	4	5	1
3	1	5	2	0	2	2	3	2	2	2	6	2	1	3	1	3	1	5	4
5	5	3	2	2	0	2	1	1	3	2	3	5	3	5	2	5	2	1	1
2	3	4	3	2	3	2	4	2											

Вибірка *C*

	67	68	70	76	80	87	75	79	79	73	86	78	79	67	79
Y	-201	-199	-206	-221	-238	-256	-222	-230	-234	-217	-253	-228	-230	-201	-237
Z	602	602	625	674	718	781	668	702	701	648	773	692	708	596	702

Варіант 2

Вибірка *A*

3	7	4	6	1	4	2	4	6	5	3	2	9	0	5	6	7	7	3	1
5	5	4	2	6	2	1	5	3	3	1	5	6	4	4	3	4	1	5	5
3	4	3	7	4	5	6	7	5	2	4	6	6	7	7	3	5	4	4	3
5	5	7	6	6	1														

Вибірка *C*

	48	40	52	50	39	47	38	46	47	44	45	44	53	52	45
Y	99	83	106	107	79	100	80	96	98	97	92	90	108	107	96
Z	520	435	564	541	424	516	413	505	514	479	490	483	577	569	493

Варіант 3

Вибірка *A*

0	0	2	0	1	3	0	1	0	1	2	1	3	0	0	2	1	3	2	2
1	3	3	2	0	2	4	3	2	1	2	2	2	2	3	3	1	1	1	3
2	1	0	1	2	1	4	4	2	3	3	5	5	2	1	2	3	2	3	1
1	0	1	0	4	1	1	0	2	2	4	2	1	4	3	0	2	0	2	0
3	1																		

Вибірка *C*

X	58	57	46	54	67	60	53	57	41	58	43	55	40	67	57
Y	62	57	49	63	72	64	53	65	45	61	45	57	43	74	57
Z	513	510	406	476	602	538	467	507	362	513	384	488	358	601	511

Варіант 4

Вибірка *A*

3	3	1	0	0	3	3	5	3	0	0	4	1	5	1	6	5	4	7	4
5	3	3	0	2	3	1	4	1	2	4	3	4	5	4	0	5	6	6	3
5	4	1	3	3	6	3	1	1	5	2	3	5	3	3	4	1	5	6	1
3	3	3	5	6	1	2	1	3	4										

Вибірка *C*

	62	71	67	66	67	70	64	66	78	65	63	59	69	71	59
Y	195	220	205	207	201	215	197	206	241	197	196	216	180	214	185
Z	486	566	531	520	534	558	510	523	622	511	501	549	471	558	466

Варіант 5

Вибірка *A*

0	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	2	1	0	1

Вибірка *C*

	31	28	30	23	25	25	25	27	31	25	28	25	30	28	28
Y	318	280	305	234	255	258	258	272	317	252	280	258	304	289	288
Z	-37	-36	-32	-30	-32	-33	-27	-28	-40	-33	-31	-31	-39	-30	-34

Варіант 6

Вибірка *A*

4	10	7	6	3	7	8	7	4	7	10	7	3	9	3	1	5	8	10	11
6	5	7	6	3	8	4	3	8	4	10	6	8	7	8	7	7	7	4	6
7	10	4	4	0	5	4	4	8	5	5	10	7	3	8	5	6	6	6	3
5	7	8	5	7	10	9	10	8	2	3	6	9							

Вибірка *C*

	93	91	92	90	90	94	90	97	95	94	91	93	95	97	87
Y	-270	-264	-269	-268	-262	-280	-263	-289	-278	-279	-265	-283	-252	-283	-285
Z	555	536	551	534	539	562	532	572	567	561	540	550	568	516	566

Варіант 7

Вибірка *A*

2	2	1	3	4	2	1	1	3	3	4	3	2	4	2	1	4	3	1	4
0	4	2	3	4	3	7	1	3	3	3	4	3	2	1	2	3	3	1	5
3	0	2	1	2	3	0	0	3	6	2	4	3	4	2	4	1	2	0	3
1	0	0	2																

Вибірка *C*

	53	29	40	41	44	28	48	53	26	43	42	68	42	60	39
Y	-204	-110	-152	-161	-167	-109	-186	-203	-99	-168	-159	-266	-159	-237	-147
Z	309	169	230	238	259	158	283	316	149	256	251	401	242	355	334

Варіант 8

Вибірка *A*

8	4	4	7	5	5	5	3	10	2	3	6	7	6	10	6	7	7	6	10
7	6	8	10	7	7	9	1	3	4	7	4	4	5	4	9	6	5	9	5
6	5	6	4	7	2	5	7	6	7	3	8	8	7	4	7	5	7	6	6
5	6	6	6	12	5	11	8	1	10	10	9	1	4	5	6	8	4	10	8

Вибірка *C*

	46	40	58	35	53	47	40	60	39	41	58	59	57	65	34
Y	279	245	354	212	323	285	240	361	235	246	357	361	343	390	208
Z	44	39	49	25	47	42	32	53	29	39	54	55	50	55	28

Варіант 9

Вибірка *A*

2	1	2	3	1	1	0	2	2	4	3	3	0	3	0	3	2	3	1	2
2	3	0	2	3	0	2	3	3	4	4	1	4	0	0	1	2	4	4	3
0	0	0	2	2	3	2	1	0	0	0	3	1	0	1	2	1	2	2	4
3	2	0	0	1	0	3	0	0	3	1	3	4	2	3	3	2	0	4	

Вибірка *C*

	77	76	62	83	83	79	77	81	71	83	73	81	82	77	83
Y	605	632	554	594	612	556	679	629	582	611	626	703	650	655	577
Z	58	49	63	62	61	57	79	55	64	70	62	80	62	55	65

Варіант 10

Вибірка *A*

3	5	6	8	4	5	4	7	2	7	7	3	7	4	4	5	4	4	5	2
4	8	8	4	6	5	9	4	0	4	4	4	9	3	3	2	1	5	2	5
5	3	4	4	7	8	9	11	4	5	2	5	7	6	1	2	5	6	3	1
2	6	7	3	3	2	5	4	8	2	6	5	9	5	5	2	8	3	6	4

Вибірка *C*

	71	73	69	73	68	67	69	80	77	74	78	68	73	64	67
Y	149	148	139	147	139	135	139	168	157	149	161	137	153	131	139
Z	561	577	545	574	540	535	544	634	615	584	615	535	580	506	530

Варіант 11

Вибірка *A*

4	5	6	1	1	6	2	2	8	4	5	5	4	2	3	4	7	5	4	7
3	3	4	4	3	8	4	3	5	5	2	1	4	3	5	1	4	3	3	3
1	0	2	2	1	7	5	2	6	2	1	1	8	4	5	4	1	4	5	9
5	5	4	4	6	1														

Вибірка *C*

	11	9	12	10	7	8	9	9	11	13	9	9	10	13	7
Y	42	35	45	32	30	32	30	34	36	42	27	29	38	21	41
Z	58	45	64	58	33	46	46	50	63	70	52	49	77	32	50

Варіант 12

Вибірка *A*

11	6	7	8	7	3	7	3	3	12	7	9	12	5	10	4	7	2	7	7
4	5	11	5	5	6	4	5	8	9	8	12	5	6	7	10	11	9	13	9
3	8	11	9	7	12	6	6	14	11	9	8	14	6	4	10	8	4	6	8
3	6	6	7	7	6	10	11	3	11	8	5	8	11	11	6	11	7	8	7
12	5	5	9	5	7	10	5	7											

Вибірка *C*

	41	40	41	40	41	42	42	40	40	41	40	39	41	41	40
Y	209	201	214	222	210	219	208	208	206	200	209	202	212	216	220
Z	270	266	274	278	278	263	283	257	279	267	264	284	257	278	276

Варіант 13

Вибірка *A*

1	0	1	1	1	2	0	2	1	0	0	0	1	0	3	2	1	1	1	0
0	0	1	1	0	2	0	3	1	2	1	3	2	1	0	0	1	0	1	1
0	2	3	1	0	3	1	1	1	2	1	1	0	0	1	1	3	0	2	3
2	1	1	0	4	2	2	1	1	2	0									

Вибірка *C*

	60	54	67	57	66	58	63	58	70	59	62	51	61	71	70
Y	246	224	277	237	265	236	261	234	282	239	255	204	245	286	295
Z	297	264	332	381	324	286	308	282	343	290	309	250	304	351	324

Варіант 14

Вибірка *A*

6	6	5	6	11	8	7	4	4	8	3	2	3	9	7	6	9	5	8	8
7	10	8	6	9	9	10	3	10	5	7	6	8	9	9	3	8	4	11	4
6	9	2	8	7	7	7	8	4	3	6	12	10	2	3	8	6	8	2	3
8	8	7	6	9	4	4	7	6	9	6									

Вибірка *C*

X	57	67	43	60	55	59	59	54	49	47	62	56	49	55	50
Y	61	63	59	64	63	62	68	65	68	65	62	68	64	60	67
Z	420	509	435	469	449	450	437	422	463	455	472	448	443	462	484

Варіант 15

Вибірка *A*

2	0	1	2	0	0	2	2	1	1	0	0	0	0	1	2	0	4	0	0
1	0	4	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1	1	1	0	1	1	0	3
1	2	1	0	1	2	1	2	3	0	2	4	0	0	0	3	0	2	0	2
2	2	1	1																

Вибірка *C*

	80	85	77	85	77	93	78	74	78	86	75	79	93	84	82
Y	325	344	312	340	313	373	313	298	312	351	307	317	372	339	337
Z	232	254	224	252	221	272	230	220	225	257	217	227	274	250	243

Варіант 16

Вибірка *A*

5	4	4	4	5	0	3	7	2	2	3	0	5	6	3	4	6	1	2	5
3	2	3	6	6	2	3	1	7	2	3	2	2	5	2	0	2	2	6	1
3	6	7	7	2	0	4	6	1	1	6	7	1	3	4	6	6	3	2	1
7	2	5	4	2	3	4	5	6	6	5	3	2							

Вибірка *C*

	25	47	42	38	30	30	32	38	34	34	41	37	39	36	29
Y	233	432	385	347	274	276	294	348	315	307	377	353	332	307	264
Z	-7	-6	-10	-1	-2	-6	-6	-5	-10	-4	-9	-5	-7	-3	-10

Варіант 17

Вибірка *A*

8	4	11	7	7	5	8	9	6	7	1	6	5	8	7	4	8	4	6	5
7	4	8	7	4	3	2	8	5	0	4	7	6	3	5	7	2	6	6	5
8	1	8	6	6	8	8	9	6	8	7	5	12	5	3	9	7	7	8	3
7	9	6	5	4	4	4	7	7	4	5	9	5	9	3	4	4	8	5	1
10	6	1	7	8	6	7	9												

Вибірка *C*

	20	15	16	16	10	15	23	15	17	17	17	19	16	11	13
Y	96	64	74	69	40	61	102	63	70	83	76	86	73	52	55
Z	134	94	110	101	67	102	153	93	105	102	109	119	102	64	75

Варіант 18

Вибірка *A*

5	3	3	3	5	4	5	3	3	4	2	1	5	2	4	0	2	2	3	2
1	3	3	1	2	4	6	6	4	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	8
4	5	1	1	2	0	2	3	3	2	4	2	1	2	3	1	2	4	3	0
6	3	1	4	3	7	1	1	0	2	3	1	1							

Вибірка *C*

	56	48	52	50	51	51	53	49	50	51	59	52	51	52	47
Y	576	487	522	507	521	527	540	506	515	511	598	522	515	521	531
Z	-130	-113	-107	-107	-116	-104	-124	-108	-120	-110	-112	-119	-107	-100	-123

Варіант 19

Вибірка *A*

2	2	0	1	3	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	4	1	0	0
0	2	0	1	1	0	1	2	1	2	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1
0	1	0	0	2	1	0	0	1	1	1	0	0	2	0	0	1	1	0	0
0	0	0	2	1	1	1	1	3	0	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0

Вибірка *C*

	34	53	41	50	21	51	40	46	50	48	28	55	60	48	45
Y	247	374	296	354	148	359	284	323	355	337	198	386	420	342	320
Z	161	255	200	243	99	245	194	222	242	233	136	271	294	231	218

Варіант 20

Вибірка *A*

7	8	4	0	4	6	5	4	3	2	4	8	6	2	2	5	3	6	6	5
5	3	5	6	7	8	9	5	2	5	4	5	6	6	3	6	5	3	4	5
10	3	7	5	3	3	3	7	5	3	4	9	2	1	4	4	4	2	4	3
4	4	5	5	3	7	5	3	2	6	2	4	4	4	0	6	1	3	4	4
5	4	8	3	5	4	11	9	9											

Вибірка *C*

	27	30	29	28	30	32	30	30	29	30	27	32	30	29	31
Y	270	304	295	293	307	332	302	309	303	303	283	324	303	297	310
Z	-63	-76	-62	-69	-74	-82	-64	-72	-64	-66	-74	-67	-77	-80	-73

Варіант 21

Вибірка *A*

4	5	3	4	5	2	3	3	3	4	4	5	3	1	4	1	4	5	5	1
2	5	5	5	3	4	3	5	5	4	0	2	6	7	1	3	2	2	4	2
3	3	6	0	6	2	4	3	6	1	5	4	4	4	5	2	4	5	3	5
5	6	2	2	3	2	2	5	2	5	5	0	7	1	0	0	0	5	3	2
7	6	3	5	3															

Вибірка *C*

	16	17	16	18	15	16	17	19	15	16	15	18	15	16	15
Y	110	121	96	112	98	111	120	128	99	98	95	127	96	106	108
Z	92	94	91	103	76	89	100	107	80	77	79	98	85	93	73

Варіант 22

Вибірка *A*

2	3	1	6	4	6	3	3	1	3	1	2	4	4	4	3	0	3	2	4
2	3	2	3	3	2	0	6	1	0	2	2	6	2	0	2	4	3	1	5
3	0	4	4	3	5	3	2	5	2	0	2	0	2	5	0	1	3	3	2
0	2	2	2	5															

Вибірка *C*

	40	35	24	37	42	38	35	38	32	38	37	41	33	32	42
Y	169	147	115	160	168	153	159	162	146	154	167	182	139	128	178
Z	73	56	31	69	78	63	69	74	58	60	71	81	60	58	72

Варіант 23

Вибірка *A*

1	4	3	3	1	0	4	0	4	3	2	0	2	2	3	3	1	0	3	3
3	2	3	3	3	2	5	6	3	2	5	2	3	4	2	3	2	2	6	2
0	1	2	3	6	2	1	4	3	3	1	5	4	3	2	1	1	1	6	3
2	0	2	2	2	3														

Вибірка *C*

	58	62	65	61	66	67	67	65	62	68	64	55	68	64	63
Y	122	138	137	133	132	143	137	131	142	138	143	114	136	130	143
Z	339	353	377	349	394	385	395	389	353	405	365	310	395	368	361

Варіант 24

Вибірка *A*

7	11	5	5	5	5	9	4	5	3	8	5	3	8	3	11	3	9	6	8
3	3	6	2	7	4	4	3	5	7	4	6	5	2	9	5	8	6	1	1
7	7	4	4	9	7	4	3	1	6	6	4	5	4	5	5	7	8	6	8
4	10	2	7	7	5	9	6	11	2	7	7	9	2	6	8				

Вибірка *C*

	72	77	75	70	72	72	70	76	80	65	70	70	70	80	65
Y	721	788	755	719	434	725	717	779	800	662	710	718	702	804	655
Z	487	528	524	482	486	493	470	529	553	443	475	476	479	541	439

Варіант 25

Вибірка *A*

2	0	2	6	2	3	5	3	8	3	6	4	5	2	6	6	5	5	8	8
3	5	3	2	4	5	2	1	6	9	7	6	7	4	5	6	5	6	8	3
6	5	5	1	7	6	4	1	5	6	4	7	2	8	8	2	8	2	1	6
5	2	3	6	3	3	5	3	3	7	5	6	6	3	4	6	7	4	6	2
7	7	1	2	3	6	6	3	2	6	4	2	4	8						

Вибірка *C*

	35	34	42	27	41	40	32	40	36	32	40	33	36	32	37
Y	181	187	218	145	206	204	172	219	197	173	211	177	187	179	185
Z	52	61	73	49	74	79	45	69	53	45	73	49	61	49	69

Варіант 26

Вибірка *A*

2	0	0	3	1	2	2	2	3	4	1	2	3	3	2	1	1	3	3	0
4	1	3	3	0	1	0	0	1	2	1	1	3	2	3	0	1	0	4	2
3	1	2	1	1	1	1	2	1	2	5	2	1	3	2	3	1	1	1	1
2	1	1	1	3	1	3	1	2	1	2	1	1	0	0	3	3	1	2	3

Вибірка *C*

	90	92	90	90	86	90	89	89	88	90	90	90	88	89	90
Y	546	568	555	544	519	550	550	537	528	553	551	553	535	547	542
Z	-4	-11	-6	-11	-3	-3	-16	-19	-16	-15	-1	-4	-13	-11	-2

Варіант 27

Вибірка *A*

1	0	1	3	1	1	4	0	0	1	1	1	0	1	2	0	2	1	0	1
1	0	1	0	2	2	1	1	0	0	0	1	2	1	1	1	2	3	0	1
0	2	2	0	2	2	0	1	0	0	0	0	3	2	2	3	1	2	0	1
2	1	1	0	1	2	0	2	2	1	0	0	2	0	0	0	3	1	2	2
2	0	2	0	2	10	3	1	1	3										

Вибірка *C*

	93	88	91	83	89	86	85	88	85	87	82	91	86	86	87
Y	298	281	283	254	271	260	262	275	265	277	256	280	263	264	279
Z	-194	-178	-199	-178	-188	-183	-175	-182	-188	-188	-183	-187	-179	-191	-176

Варіант 28

Вибірка *A*

0	1	0	1	0	0	1	3	1	1	1	0	3	0	2	0	0	0	0	1
1	1	1	3	2	0	0	1	4	1	0	0	0	2	0	1	2	1	2	0
1	2	1	0	0	1	0	1	1	0	2	1	1	2	0	1	0	0	0	2
1	2	0	1	1	1	2	0	0	2	4	1	2	3	0	0	0	2	0	4

Вибірка *C*

	39	36	35	20	31	41	24	22	38	35	26	34	16	35	22
Y	242	235	228	136	204	249	160	140	229	213	172	207	98	225	141
Z	-82	-89	-72	-41	-78	-83	-62	-49	-88	-74	-65	-88	-52	-74	-57

Варіант 29

Вибірка *A*

4	1	9	6	11	11	6	5	10	4	10	10	12	10	9	6	6	8	4	10
2	5	6	8	6	7	2	2	6	12	2	8	8	11	9	6	7	4	5	9
7	9	5	9	10	5	8	6	10	8	8	6	9	10	8	6	1	3	10	4
8	6	10	9	10	3	6	11												

Вибірка *C*

	14	16	16	15	15	13	17	14	13	15	14	14	16	11	13
Y	86	86	80	80	88	74	86	80	79	92	77	81	87	71	81
Z	-26	-28	-33	-23	-17	-20	-26	-21	-26	-26	-16	-24	-31	-24	-18

Варіант 30

Вибірка *A*

4	6	0	2	1	3	3	1	2	5	3	1	2	2	4	4	4	3	2	5
2	5	1	2	3	0	3	0	5	1	2	1	3	0	4	0	2	2	1	0
5	1	4	2	4	2	1	3	1	0	6	1	2	1	4	2	2	0	2	4
2	2	1	2	2															

Вибірка *C*

	92	81	92	93	108	78	98	99	90	93	92	76	90	90	87
Y	189	169	201	196	229	169	201	210	191	193	195	169	193	190	177
Z	173	156	183	175	200	137	193	186	172	177	178	140	173	170	154

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Вентцель Е.С*. Теория вероятностей / Е. С Вентцель. – М.: Наука, 1964. – 590 с.
2. *Гнеденко Б.В*. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Физматгиз, 1961. – 735 с.
3. *Гмурман. В.Е*. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2002. – 479 с.
4. *Гурский Е.И*. Теория вероятностей с элементами математической статистики / Е. И. Гурский. – М.: Высш. шк., 1971. – 328 с.
5. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М.: Высш. шк., 2000. – 333 с.
6. *Данко П.Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М.: Высш. шк., 1986. – 319 с.
7. *Кремер Н.Ш*. Теория вероятностей и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. – М.: ЮНИТО, 2000. – 253 с.

ЗМІСТ

Навчальне видання

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
ТА МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Навчальний посібник

Автори
Асєєв Г.Г., докт. техн. наук, проф.,
Коноваленко О.Є., ст. викладач,
Рибін О.М., канд. фіз.-мат. наук, доцент

Друкується в авторській редакції

Комп'ютерна верстка *Рибіної Ю. О.*

План 2004
Підписано до друку26.11.04. Формат 60х84/16.
Гарнітура «Times». Папір для мн. ап. Друк ризограф.
Ум. друк. 5,29. Обл.-вид. 5,36.
Тираж 300. Зам. №   .

ХДАК, 61003, Харків-3, Бурсацький спуск 4.
Надруковано в лаб. множ. техніки ХДАК